КУРСЪ ГИДРАВЛИКИ.

ЛЕКЦІИ,

читанныя въ С.-Петербургскомъ Практическомъ Технологическомъ Институтѣ

И. А. ЕВНЕВИЧЕМЪ.

Съ 125 рисунками въ текстѣ и особымъ атласомъ въ 14 листовъ.

ВТОРОЕ изданіе, исправленное и дополненное.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Изданіе К. Л Риккера,
Невскій проспектъ, 14.
1891.

КУРСЪ
ГИДРАВЛИКИ.

ЛЕКЦІИ,

читанныя въ С.-Петербургскомъ Практическомъ Технологическомъ Институтѣ

И. А. ЕВНЕВИЧЕМЪ.

Съ 125 рисунками въ текстѣ и особымъ атласомъ въ 14 листовъ.

ВТОРОЕ ИЗДАНІЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ЗНАЧИТЕЛЬНО ДОПОЛНЕННОЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
ИЗДАНІЕ К. Л. РИККЕРА.
Невскій проспектъ, 14.
1891.

ТИПОГРАФІЯ
М. СТАСЮЛЕВИЧА
В. О. 5 Л. 28

1781

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГИДРОСТАТИКА.

*) Цифры эти обозначаютъ страницы.

ГИДРОДИНАМИКА.

ГИДРАВЛИЧЕСКІЕ ПРІЕМНИКИ.

Гидравлическія колеса.

A) Подливныя колеса.

B) Наливныя колеса.

2) Тюрбины Борда и ударная.

Водостолбовыя машины.

Пріемники вѣтра.

ВОДОПОДЪЕМНЫЯ МАШИНЫ.

I. Насосы съ прямолинейнымъ движеніемъ.

1) Насосы съ глухимъ поршнемъ.

2) Насосъ съ сквознымъ поршнемъ.

II. Центробѣжные насосы.

III. Архимедовъ винтъ.

ОПИСАНІЕ ЧЕРТЕЖЕЙ АТЛАСА.

Листъ I. Чертежи 1, 2 и 3 представляютъ деревянное пошвенное колесо съ прямыми лопатками и прямымъ желобомъ. Колесо это имѣетъ два брусчатыхъ обода, составленныхъ изъ косяковъ A, A', A''..., скрѣпленныхъ въ одно цѣлое желѣзными накладками. Ободья соединены съ валомъ накрестъ пересѣкающимися ручками B, B,... каждая ручка соединяется съ ободомъ двумя болтами врубкою сего послѣдняго въ ручку *въ полъдерева* (чер. 2 a, a). Соединеніе ручекъ съ валомъ совершено помощью деревянныхъ клиньевъ, уложенныхъ въ промежуткѣ между валомъ и ручками въ отверстіи, образованномъ взаимнымъ пересѣченіемъ сихъ послѣднихъ. Лопатки составлены изъ досокъ, прикрѣпленныхъ къ клиньямъ C, C... болтами; хвосты b, b... клиньевъ вставлены въ отверстія, сдѣланныя въ ободьяхъ и укрѣплены тамъ чеками m, m...

Чертежи, начиная съ 4 по 12 включительно, показываютъ различные способы укрѣпленія цапфъ въ валѣ, а именно: съ 4 по 9 включительно—въ деревянномъ валѣ, а съ 10 по 12—въ металлическомъ валѣ.

Листъ II. Чертежи 1 и 2 представляютъ деревянное колесо Понселе, съ двумя ободьями каждый изъ двухъ досокъ. Лопатки, также изъ досокъ, вставлены въ пазы, вырѣзанные въ ободьяхъ. Деревянныя ручки соединены съ ободьями болтами, врубкою ихъ въ ручку; соединеніе же ручекъ съ валомъ достигнуто тѣмъ, что ручки эти пропущены чрезъ отверстія, сдѣланныя на валѣ. Чертежъ 3 показываетъ взаимное соединеніе ручекъ внутри вала.

Чертежи 4 и 5 представляютъ металлическое колесо Понселе. Ручки колеса соединены съ валомъ помощью розетки простѣйшей формы а съ чугунными ободьями — болтами. Лопатки, изъ листового желѣза, соединены съ ободьями помощью болтовъ и особыхъ приливовъ, находящихся на внутренней сторонѣ ободьевъ. Во избѣжаніе прогиба лопатокъ между ними помѣщены болты съ трубками.

Чертежи отъ 5 до 10 представляютъ различные виды чугунныхъ валовъ съ скрѣпляющими ребрами.

Листъ III. Чертежи съ 1 по 6 включительно представляютъ верхне наливное деревянное колесо съ передаточнымъ зубчатымъ колесомъ, укрѣпленномъ на ручкахъ. Колесо это имѣетъ кромѣ радіальныхъ ручекъ *A*, *A*..., еще и діагональныя *B*, *B*... и переферическія *C*, *C*... Чертежъ 3 показываетъ устройство лопатокъ и кожуха колеса. Чертежи 4 и 5 показываютъ укрѣпленіе ручекъ въ розеткѣ, а чертежъ 6—связь между радіальною ручкою и ободомъ, а также между этою ручкою и діагональною. Чертежи 7 и 8 представляютъ общій видъ плавающаго колеса Колладона.

Листъ IV. Чертежи 1 и 2 представляютъ металлическое верхне-наливное колесо съ тремя ободьями, изъ которыхъ средній предназначенъ для предотвращенія прогиба ковшей. Система спицъ, поддерживающихъ этотъ послѣдній ободъ, расположена по производящимъ конусовъ. Передаточное колесо насажено на ободѣ. Чертежъ 3 представляетъ въ большемъ видѣ часть разрѣза и часть бокового вида обода колеса. Въ разрѣзѣ можно видѣть образованіе ковшей и кожуха изъ листового желѣза и соединеніе ихъ съ ободомъ. Чертежъ 4 представляетъ планъ также верхне-наливного колеса небольшой ширины съ зубчатымъ колесомъ на ободѣ и съ переферическими спицами.

Листъ V. Чертежъ 1 представляетъ общій видъ средне-наливного колеса съ щитовыми отверстіями и концентрическимъ русломъ. Ковши образованы кривыми лопатами и кожухомъ. Въ верхней части каждаго ковша (въ кожухѣ) сдѣлано небольшое отверстіе для вентиляціи. Чертежъ 2 представляетъ часть обода также средне-наливного колеса, ковши котораго построены изъ досокъ, причемъ заднія грани ковшей своею совокупностью образуютъ кожухъ.

Чертежъ 3 представляетъ деталь соединенія оконечности желѣзной діагональной спицы съ ободомъ.

Чертежъ 4 представляетъ общій видъ верхне-наливного колеса большой скорости съ концентрическимъ русломъ, для устраненія слишкомъ ранняго вытеканія воды.

Листъ VI. Чертежи 1, 2, 3 и 4 представляютъ деревянное боковое колесо съ впускомъ воды ниже горизонтальнаго радіуса. Колесо это имѣетъ одинъ только ободъ, къ которому лопатки прикрѣплены помощью клиньевъ, указанныхъ на чертежѣ 3. Чертежъ 2 указываетъ на форму и расположеніе отверстій на ободѣ, предназначенныхъ для этихъ клиньевъ.

Чертежи 5, 6 и 7 суть детали розетокъ водяныхъ колесъ.

Листъ VII. Чертежи 1 и 2 представляютъ боковое колесо, съ впускомъ воды близъ горизонтальнаго радіуса чрезъ водосливъ, съ деревяннымъ русломъ, а чертежи 3 и 4—такое же колесо, но съ впускомъ чрезъ щитовыя отверстія и съ русломъ, выложеннымъ изъ тесаннаго камня.

Листъ VIII. Чертежи 1 и 2 представляютъ тюрбину Фурнейрона низкаго давленія. Для подведенія масла къ пятѣ служитъ трубочка *a, a*...., а для сообщенія небольшихъ перемѣщеній всей тюрбинѣ служитъ рычагъ *AA* съ тягою *B, B*... Чертежи 3 и 4 представляютъ, въ увеличенномъ масштабѣ противъ прежняго, часть колеса и направляющаго аппарата тюрбины.

Листъ IX. Чертежъ 1 представляетъ тюрбину Жонваля низкаго давленія. Чертежъ 2 представляетъ боковой видъ лопатокъ направляющаго аппарата и тюрбины, а чертежъ 3—планъ и разрѣзъ этихъ же частей.

Листъ X. Чертежи представляютъ тюрбину Фонтэна съ регулированіемъ воды чрезъ превращеніе тюрбины изъ полной въ партіальную. Чертежъ 7 представляетъ такую же тюрбину, но съ двумя отдѣленіями: внѣшнимъ и внутреннимъ. Чертежъ 3 изображаетъ тюрбину Фонтэна съ регулированіемъ помощью щита, представленнаго на чертежахъ 4 и 5. Чертежъ 5 изображаетъ радіальную тюрбину Жирара съ гидропневматизаціей.

Листъ XI. Чертежи 1 и 2 представляютъ полную радіальную тюрбину безъ направляющихъ лопатокъ и щитомъ, регулирующимъ истокъ воды изъ тюрбины.

Чертежи 3 и 4 указываютъ на общій видъ тюрбины Фурнейрона высокаго давленія.

Чертежи 5 и 6 представляютъ Шотландскую тюрбину о трехъ рукавахъ.

Листъ XII. Чертежи 1 и 2 представляютъ въ разрѣзѣ и въ боковомъ видѣ одинъ изъ способовъ привѣшиванія тюрбинъ. *A* есть пята тюрбины, укрѣпленная въ верхней части трубчатой оси *CC*. *BB* есть неподвижный столбъ, служащій для поддержанія подпятника. Чертежъ 3 представляетъ также одинъ изъ способовъ подвѣшиванія тюрбинъ. *AA* есть вращающійся валъ тюрбины; *B*—неподвижный подпятникъ, *CCC*—катки, при помощи которыхъ скользящее треніе пяты замѣняется въ треніе второго рода. Чертежи 4 и 5 указываютъ также на способы подвѣшиванія. На чер. 4 *A* есть неподвижный столбъ, поддерживающій подпятникъ, а *BB* трубчатая ось тюрбины; на чертежѣ 5 *A* также неподвижный столбъ, а *B*—передаточная ось, соединенная клиномъ съ трубчатою осью *CC* тюрбины. Чертежи 6 и 7 представляютъ обыкновенныя подпятники тюрбинъ.

Чертежъ 8 представляетъ разрѣзъ всасывающаго насоса съ деревянными трубами; чертежъ 9—разрѣзъ насоса (съ ныряломъ) нагнетательнаго; чертежъ 10—также всасывающаго насоса металлическаго и чертежъ 11—насоса двойного дѣйствія. Клапаны у насоса, представленнаго на чертежѣ 9, металлическіе съ прямолинейнымъ движеніемъ, а у остальныхъ насосовъ—кожанные.

Листъ XIII. Чертежи 1 и 2 представляютъ насосы простого дѣйствія—первый съ металлическими клапанами, а второй съ каучуковыми. Этотъ послѣдній насосъ можетъ служить для подъема нагрѣтыхъ жидкостей. Чертежъ 3 представляетъ частью въ разрѣзѣ, а частью въ боковомъ видѣ обыкновенный всасывающій насосъ съ сквознымъ поршнемъ. Чертежи 4, 5 и 6 представляютъ различнаго рода сложные клапаны.

Листъ XIV. Чертежъ 1 представлявляетъ насосъ простого дѣйствія съ глухимъ поршнемъ, съ кожанною набивкою, а чертежъ 2—подобный же насосъ, но съ набивкою пеньковою. У перваго насоса клапаны металлическіе съ прямолинейнымъ движеніемъ, а у второго съ вращательнымъ движеніемъ. Чертежъ 3 представляетъ насосъ двойного дѣйствія. Чертежъ 4 представляетъ насосъ центробѣжный.

ГИДРОСТАТИКА.

Опредѣленіе жидкости и гидростатическаго давленія.

1. Часть теоретической Механики, занимающаяся жидкими тѣлами, или, такъ называемая, *Гидромеханика*, состоитъ изъ *Гидростатики*, излагающей законы равновѣсія и *Гидродинамики* опредѣляющей обстоятельства движенія жидкостей.

Окончательные выводы Гидростатики и Гидродинамики получаются, на основаніи общихъ началъ Механики, изъ характеристическаго свойства жидкихъ тѣлъ, вытекающаго изъ слѣдующаго опредѣленія жидкости.

Жидкостью называютъ тѣло, способное обнаруживать сопротивленіе внѣшнимъ силамъ, его сжимающимъ, но неспособное представить сопротивленій, какъ силамъ его растягивающимъ, такъ и производящимъ сдвигъ или скольженіе.

Жидкости, удовлетворяющія вполнѣ этому свойству, называются *совершенными*; существующія же въ природѣ, *дѣйствительныя жидкости*, удовлетворяютъ ему только до нѣкоторой степени, то-есть, онѣ представляютъ сопротивленіе и силамъ растягивающимъ, или же производящимъ сдвигъ, но весьма слабое.

Сообразно явленіямъ, обнаруживаемымъ жидкостями во время дѣйствія на нихъ сжимающихъ усилій, ихъ можно подраздѣлить на два класса: на *капельныя* или *неупругія* жидкости и на *газообразныя* или *упругія*.

Къ первому классу относящіяся жидкости, при самыхъ большихъ давленіяхъ, обнаруживаютъ едва замѣтное для наблюденій уменьшеніе ихъ объема, почему и могутъ быть, съ значительною степенью точности, разсматриваемы какъ совершенно лишенныя способности сжиматься; ко второму же классу относящіяся жидкости, напротивъ того, способны измѣнять объемъ въ значительной степени.

Главнѣйшимъ представителемъ въ природѣ жидкостей перваго класса есть вода, а второго класса—атмосферный воздухъ (*).

2. Изъ характеристическаго свойства жидкости вытекаетъ слѣдующее слѣдствіе: *если жидкое тѣло находится въ равновѣсіи, то внѣшнія силы, приложенныя къ частицамъ поверхности, его ограничивающей, направлены по внутреннимъ нормалямъ къ этой поверхности* (по нормалямъ, идущимъ во внутрь жидкаго тѣла).

Дѣйствительно, всякая сила, направленная не по нормали, могла бы быть разложена на двѣ: одну, направленную по нормали, и другую, лежащую въ касательной плоскости къ поверхности; эта же послѣдняя сила непремѣнно вывела бы частицу изъ положенія равновѣсія, заставляя ее скользить по поверхности, чему жидкость, по характеристическому свойству, не можетъ представить препятствій. Сила, направленная по внѣшней нормали, также вывела бы частицу изъ положенія равновѣсія, такъ какъ и растягивающимъ силамъ жидкость не представляетъ препятствій, и только сила, идущая по внутренней нормали, какъ сжимающая, могла бы вызвать въ жидкости достаточное сопротивленіе и съ нимъ уравновѣсится.

Понятно, что каждая частица жидкости, лежащая внутри массы, должна испытывать отъ окружающихъ ее частицъ нѣкоторыя давленія. Въ изученіи свойствъ этого давленія, въ случаѣ равновѣсія жидкости, и состоитъ существенная задача Гидростатики, поэтому необходимо составить себѣ объ этомъ давленіи совершенно точное понятіе.

3. Вообразимъ внутри массы жидкаго тѣла нѣкоторую частицу M и мысленно проведемъ чрезъ нее какую-либо поверх-

(*) Вода, напр., при температурѣ 15°C, отъ увеличенія давленія на одну атмосферу уменьшается въ объемѣ на 0,000045 частей первоначальнаго объема.

ность PMQ, такъ, чтобы сія послѣдняя разсѣкла тѣло на двѣ части A и B. Спрашивается, каково будетъ, въ случаѣ равновѣсія, давленіе части A на частицу M, принадлежащую поверхности PMQ, ограничивающей часть B жидкости? Такъ какъ давленіе это есть внѣшняя сила въ отношеніи массы B и частица M находится на ограничивающей эту массу поверхности, то давленіе части A на частицу M должно быть направлено по нормали къ поверхности PMQ въ точкѣ M и должно идти во внутрь части B. Такимъ образомъ, очевидно, что *дѣйствіе части A жидкости на разсматриваемую частицу M состоитъ въ отталкиваніи ее во внутрь части B.*

Выдѣлимъ теперь на поверхности PMQ безконечно-малую площадку (напр., безконечно-малый квадратъ, или кругъ и т. п.) такъ, чтобы точка M была въ ея центрѣ тяжести. Каждая точка этой площадки, подобно точкѣ M, подвергается дѣйствію отъ части A жидкости, и такъ какъ расположеніе различныхъ точекъ этой площадки, въ отношеніи къ части A, отличается отъ расположенія къ ней точки M безконечно мало, то и давленія на эти точки могутъ отличаться отъ давленія на точку M только безконечно малыми величинами въ сравненіи съ самыми давленіями, поэтому всѣ эти давленія должно разсматривать какъ силы, равныя между собою и перпендикулярныя къ одной и той же площадкѣ. Равнодѣйствующая этихъ параллельныхъ давленій будетъ равна ихъ суммѣ и будетъ пропорціональна числу составляющихъ силъ, то-есть—величинѣ площади площадки, а потому и можетъ быть обозначена чрезъ $p \,.\, d\varpi$; гдѣ $d\varpi$ есть площадь площадки, а p—коэффиціентъ пропорціональности, очевидно, представляющій собою *давленіе, отнесенное къ единицѣ площади*

Это послѣднее давленіе p мы и будетъ называть *гидростатическимъ давленіемъ въ разсматриваемой точкѣ M жидкости.* Само собою разумѣется, что давленіе p будетъ перпендикулярно къ площадѣ $d\varpi$.

Теперь рождается вопросъ: зависитъ ли величина гидростатическаго давленія, въ данной точкѣ жидкости, отъ положенія той площадки, на которую разсматривается дѣйствіе этого давленія?

Еслибы всѣ предыдущія сужденія мы примѣнили къ твердому тѣлу и такимъ образомъ опредѣлили бы давленіе одной части A этого тѣла на частицу M, лежащую на поверхности отдѣляющей часть A отъ остальной части B, то, во-первыхъ, полученное давленіе могло-бы быть направлено и не по нормали къ этой поверхности въ точкѣ M и, во-вторыхъ, величина этого давленія зависѣла бы отъ направленія нормали. Жидкое же тѣло представляетъ собою такой частный случай, что давленіе для него, о которомъ говоримъ, можетъ быть направлено только по нормали, какъ это намъ уже извѣстно и, какъ мы сейчасъ докажемъ, *величина его не зависитъ отъ направленія нормали къ той площадкѣ, на которую разсматривается его дѣйствіе.*

Для доказательства этого послѣдняго предложенія выведемъ условія равновѣсія безконечно-малаго тетраэдра, выдѣленнаго внутри массы жидкаго тѣла.

Вообразимъ внутри жидкости, находящейся въ состояніи равновѣсія, тетраэдръ, коего безконечно малыя ребра MA, MB и MC послѣдовательно параллельны взаимно перпендикулярнымъ координатнымъ осямъ x, y и z. Тетраэдръ этотъ, находясь внутри жидкости, будетъ подверженъ дѣйствію слѣдующихъ внѣшнихъ, въ отношеніи къ нему, силъ: во-первыхъ, нѣкоторыхъ давленій отъ окружающей его массы, дѣйствующихъ на грани по направленіямъ къ нимъ перпендикулярнымъ и притомъ обращенныхъ во внутрь тетраэдра и, во-вторыхъ, нѣкоторыхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на всѣ точки безъ исключенія (напр., сила тяжести и т. п.). Пусть $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$, $\tilde{\omega}_z$ и $\tilde{\omega}_n$ будутъ площади граней MBC, MAC, MAB и ABC, имѣющихъ внѣшними нормалями прямыя x, y, z и n; p_x, p_y, p_z и p_n пусть будутъ гидростатическія давленія на граняхъ $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$, $\tilde{\omega}_z$ и $\tilde{\omega}_n$; X, Y, Z— проэкціи на координатныя оси внѣшней силы, отнесенной къ единицѣ массы жидкости (проэкціи ускоренія силы), дѣйствующей на весь объемъ; μ—плотность жидкости въ смежности съ точкою M и v—объемъ тетраэдра. Разлагая давленіе p_n на три составляющихъ, идущихъ по направленіямъ координатныхъ осей, получимъ для силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемый тетраэдръ, слѣдующія выраженія:

параллельныя оси x: $\tilde\omega_x p_x, -\tilde\omega_n p_n \cos(n, x)$ и $\mu v X$
» » y: $\tilde\omega_y p_y, -\tilde\omega_n p_n \cos(n, y)$ и $\mu v Y$
» » z: $\tilde\omega_z p_z, -\tilde\omega_n p_n \cos(n, z)$ и $\mu v Z$.

Такъ какъ отъ введенія новыхъ связей въ какую бы то ни было систему матеріальныхъ точекъ, находящуюся въ состояніи равновѣсія, равновѣсіе это не нарушается, то имѣемъ право разсматривать тетраэдръ какъ тѣло твердое и написать для его равновѣсія слѣдующія уравненія:

$$\tilde\omega_x p_x - \tilde\omega_n p_n \cos(n, x) + \mu v X = 0$$
$$\tilde\omega_y p_y - \tilde\omega_n p_n \cos(n, y) + \mu v Y = 0$$
$$\tilde\omega_z p_z - \tilde\omega_n p_n \cos(n, z) + \mu v Z = 0.$$

или, замѣчая, что взаимно перпендикулярныя грани тетраэдра суть проэкціи на координатныя плоскости наклонной къ нимъ грани $\tilde\omega_n$, то-есть, что

$$\tilde\omega_x = \tilde\omega_n \cos(n, x),\ \tilde\omega_y = \tilde\omega_n \cos(n, y) \text{ и } \tilde\omega_z = \tilde\omega_n \cos(n, z),$$

получаемъ:

$$p_x = p_n - \mu \frac{v}{\omega_x} X$$
$$p_y = p_n - \mu \frac{v}{\omega_y} Y$$
$$p_z = p_n - \mu \frac{v}{\omega_z} Z.$$

Но объемъ v тетраэдра есть безконечно-малая величина третьяго порядка, а площади его граней суть безконечно-малыя величины втораго порядка, поэтому отношенія $\frac{v}{\tilde\omega_x}$, $\frac{v}{\tilde\omega_y}$ и $\frac{v}{\tilde\omega_z}$ будутъ безконечно-малыми величинами перваго порядка, а слѣдовательно, если только количества μ, X, Y и Z для всѣхъ точекъ жидкости сохраняютъ конечныя значенія, что мы и предполагаемъ, послѣднія уравненія доставятъ:

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Эти послѣднія равенства и доказываютъ наше предложеніе. Дѣйствительно, изъ нихъ заключаемъ, что вообще гидростатическія давленія на различныя грани безконечно-малаго объема третьяго порядка, не смотря на различіе направленія нормалей къ этимъ гранямъ, должно считать равными между собою.

И такъ, гидростатическое давленіе въ данной точкѣ жидкости не зависитъ отъ направленія нормали къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ, слѣдовательно давленіе это есть функція только координатъ точки приложенія, и потому должно принять

$$p = f(x, y, z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Теперь остается указать на возможность опредѣленія вида функціи f.

Уравненія равновѣсія жидкаго тѣла.

4. Видъ функціи, изображающей собою зависимость гидростатическаго давленія отъ координатъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, можетъ быть найденъ при помощи общихъ уравненій равновѣсія жидкаго тѣла, къ выводу которыхъ мы и переходимъ.

Выдѣлимъ мысленно внутри массы жидкости весьма малый параллелопипедъ, ребра котораго, послѣдовательно параллельныя взаимно-перпендикулярнымъ осямъ x, y и z по величинѣ, суть dx, dy и dz. Сохраняя прежнія обозначенія для плотности жидкости, гидростатическаго давленія и проэкцій на оси ускоренія внѣшней силы, дѣйствующей на весь объемъ жидкости, получимъ для давленій на грани параллелопипеда отъ окружающей его массы слѣдующія выраженія: грань, ближайшая къ плоскости (yz) и ей параллельная, будетъ подвержена давленію $pdydz$, совпадающему по направленію съ осью положительныхъ x-овъ, дальнѣйшая же отъ начала грань и параллельная той же плоскости будетъ подвержена давленію, которое отъ давленія $pdydz$ можетъ отличаться только на безконечно-малую величину въ сравненіи съ самимъ давленіемъ. Дѣйствительно, при переходѣ отъ первой грани ко второй, функція p получаетъ безконечно-малое приращеніе въ разсужденіи перемѣнной x, такъ какъ при этомъ переходѣ только эта перемѣнная x и получаетъ приращеніе, равное dx, слѣдовательно, давленіе на вторую грань параллелопипеда, параллельную плоскости (yz), будетъ равно — $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \, dx\right) dydz$. Направленіе этого давленія совпадаетъ съ направленіемъ отрицательныхъ x-овъ, почему давленіе это и сопровождается у насъ знакомъ минусомъ.

Итакъ, силы дѣйствующія на параллелопипедъ по направленію оси x-овъ, суть:

$$pdydz, -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \text{ и } \mu dxdxdzX.$$

Такъ какъ гидростатическія давленія на граняхъ, ближайшихъ къ координатнымъ плоскостямъ (zx) и (xy), должны равняться давленію p, потому что эти безконечно-малыя грани параллелопипеда проходятъ чрезъ одну и ту же точку жидкости, именно чрезъ вершину параллелопипеда, ближайшую къ началу координатъ, то силы, дѣйствующія на параллелопипедъ по направленію оси y, будутъ:

$$pdzdx, -\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx \text{ и } \mu dxdydzY,$$

а по направленію оси z будутъ:

$$pdxdy, -\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy \text{ и } \mu dxdydzZ.$$

Слѣдовательно, въ случаѣ равновѣсія параллелопипеда, должны имѣть мѣсто уравненія:

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz + \mu Xdxdydz = 0$$
$$pdzdx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dzdx + \mu Ydxdydz = 0$$
$$pdxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy + \mu Zdxdydz = 0$$

или, что одно и то же,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Уравненія (2) и называются *общими уравненіями равновѣсія жидкаго тѣла.* Въ уравненіяхъ этихъ $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ суть частныя производныя функцій p по координатамъ x, y, z.

Умножая эти уравненія послѣдовательно на ∂x, ∂y и ∂z и складывая, получимъ слѣдующее основное уравненіе Гидростатики

$$dp = \mu(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

въ которомъ dp есть полный дофференціалъ функціи p, изображающей гидростатическое давленіе въ точкѣ жидкости, координаты которой суть x, y и z.

Уравненіе (3) даетъ возможность опредѣлить приращеніе давленія p, когда отъ одной точки съ координатами x, y и z переходятъ къ другой безконечно-близкой къ ней точкѣ съ координатами $x + \partial x$, $y + \partial y$ и $z + \partial z$. Изъ этого уравненія видимъ, что количества μ, X, Y и Z, въ случаѣ равновѣсія жидкости, не могутъ быть совершенно независимыми другъ отъ друга функціями координатъ, но должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ. Дѣйствительно, вторая часть уравненія (3), какъ равная полному дифференціалу нѣкоторой функціи p, должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ, получающимся чрезъ дифференцированіе уравненій (2),

$$\frac{\partial(\mu)X}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu Z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu X)}{\partial z} \quad . \quad . \quad (4)$$

Для капельной и однородной жидкости, для которой плотность μ должно принимать за количество постоянное, послѣднія условія принимаютъ видъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Эти послѣднія условія должны имѣть мѣсто и въ случаѣ газообразной жидкости, одинаково нагрѣтой во всѣхъ своихъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, для постоянныхъ газовъ зависимость между плотностью μ и давленіемъ p изображается, какъ извѣстно, формулою

$$\mu = kp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

въ которой коэффиціентъ k есть величина, зависящая отъ температуры; слѣдовательно уравненіе (3), въ случая газообразной жидкости, принимаетъ видъ

$$\frac{dp}{p} = d\,\mathrm{lognat}\,p = k\,(Xdx + Ydy + Zdz) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Вторая часть этого послѣдняго уравненія есть полный дифференціалъ функціи lognat p, а потому она должна удовлетворять условіямъ интегрируемости, которыя, въ случаѣ когда k постоянное количество, приводятся къ условіямъ (5).

Когда данная масса жидкости, находящаяся подъ дѣйствіемъ извѣстныхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствительно будетъ въ равновѣсіи, тогда интегралъ уравненія (3) опредѣлитъ намъ видъ функціи p.

Интегралъ этотъ есть слѣдующій:

$$p = \int \mu(Xdx + Ydy + Zdz) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ C есть постоянная произвольная, численное значеніе которой, въ каждомъ частномъ случаѣ, можетъ быть опредѣлено по заданному значенію гидростатическаго давленія для одной изъ точекъ жидкости.

5. Уравненія равновѣсія (2) имѣютъ мѣсто для всѣхъ точекъ жидкости безъ исключенія, а слѣдовательно, и для точекъ, лежащихъ на поверхностяхъ, ее ограничивающихъ, но для послѣднихъ точекъ этихъ уравненій недостаточно. Особыя уравненія равновѣсія, долженствующія имѣть мѣсто для точекъ, лежащихъ на ограничивающихъ поверхностяхъ, получаются безъ затрудненія на основаніи сказаннаго въ № 2.

Пусть P будетъ внѣшнее давленіе, отнесенное къ единицѣ площади и дѣйствующее въ нѣкоторой предѣльной точкѣ жидкости. Очевидно, что, въ случаѣ равновѣсія, это внѣшнее давленіе должно равняться гидростатическому давленію, имѣющему мѣсто въ этой точкѣ и опредѣляемому уравненіемъ (8); направленіе же внѣшняго давленія P должно совпадать съ внутреннею нормалью къ поверхности. Слѣдовательно, къ предыдущимъ *общимъ уравненіямъ равновѣсія*, нужно присоединить слѣдующее *особое уравненіе*

$$P = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

имѣющее мѣсто только для точекъ, лежащихъ на предѣлахъ жидкости.

Жидкость можетъ имѣть два рода поверхностей, ее ограничивающихъ, а именно: поверхности, совпадающія съ поверхностями стѣнокъ того сосуда, въ которомъ заключена жидкость, и такъ называемую *свободную поверхность*, не соприкасающуюся къ стѣнкамъ сосуда.

Уравненіе (9) имѣетъ мѣсто какъ для тѣхъ, такъ и для другихъ поверхностей, причемъ, въ случаѣ свободной поверхности, P будетъ обозначать, обыкновенно данное, внѣшнее давленіе на эту поверхность (напр., давленіе атмосферы), а въ случаѣ поверхности, соприкасающейся къ стѣнкѣ сосуда, P будетъ обозначать искомое давленіе стѣнки на жидкость, т.-е. такъ называемую *реакцію* стѣнки, равную и прямо противуположную давленію жидкости на стѣнку.

Поверхность уровня и ея свойства.

6. Положимъ, что, совершивъ на самомъ дѣлѣ указанное въ формулѣ (8) интегрированіе, получили слѣдующее уравненіе:

$$p = F(x, y, z) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

въ которомъ функція F, очевидно, удовлетворяетъ условіямъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu X, \ \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Y \text{ и } \frac{\partial F}{\partial z} = \mu Z.$$

Если въ уравненіи (10) будемъ перемѣннымъ x, y и z придавать только такія значенія, при которыхъ функція F будетъ сохранять одно и тоже значеніе, то-есть, если будемъ разсматривать p какъ постоянную, то уравненіе это представитъ намъ поверхность, называемую *поверхностью уровня* и пользующуюся тѣмъ свойствомъ, что для всѣхъ ея точекъ гидрастатическое давленіе p одинаково по величинѣ. Слѣдовательно, дифференціальное уравненіе поверхности уровня есть:

$$dp = 0 \text{ или } Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Не трудно теперь доказать слѣдующія свойства поверхностей уровня:

1) двѣ поверхности уровня, построенныя для двухъ различныхъ гидростатическихъ давленій, не могутъ имѣть общихъ точекъ и

2) равнодѣйствующая R внѣшнихъ объемныхъ силъ X, Y и Z, соотвѣтствующая данной точкѣ жидкости, перпендикулярна къ той поверхности уровня, которой принадлежитъ эта точка.

Для доказательства этихъ предложеній представимъ уравненіе (3) въ иномъ видѣ.

Пусть ∂s будетъ взаимное разстояніе двухъ безконечно близкихъ точекъ жидкости, имѣющихъ координатами одна x, y и z, а другая $x+\partial x$, $y+\partial y$ и $z+\partial z$.

При такомъ обозначеніи, ∂x, ∂y и ∂z будутъ проэкціями на координатныя оси длины ∂s, то-есть:

$$\partial x = \partial s \cos(\partial s, x),\ \ \partial y = \partial s \cos(\partial s, y) \text{ и } \partial z = \partial s \cos(\partial s, z);$$

составляющія же X, Y и Z суть проэкціи своей равнодѣйствующей R, поэтому

$$X = R\cos(R, x),\ \ Y = R\cos(R, y) \text{ и } Z = R\cos(R, z).$$

Слѣдовательно, уравненіе (3) можетъ быть написано такъ:

$$\begin{aligned} dp = \mu R \partial s\, [\cos(R, x)\cos(\partial s, x) + \cos(R, y)\cos(\partial s, y) + \\ + \cos(R, z)\cos(\partial s, z)] \end{aligned}$$

или

$$dp = \mu R \cos(R, \partial s)\, \partial s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Въ этомъ послѣднемъ видѣ представленное выраженіе для dp можетъ послужить для вывода предыдущихъ предложеній. Начнемъ со второго предложенія. Положимъ, что перемѣщеніе ∂s совпадаетъ съ поверхностью уровня, тогда оно должно удовлетворять уравненію $dp=0$, или, какъ это слѣдуетъ изъ выраженія (12),—уравненію $\cos(R, \partial s)=0$; это же послѣднее условіе прямо показываетъ, что внѣшняя сила R перпендикулярна ко всякому перемѣщенію ∂s, проходящему чрезъ данную точку и лежащему на поверхности уровня, т.-е. что сила эта направлена по нормали къ поверхности уровня.

Для доказательства перваго предложенія, положимъ, что ∂s есть перемѣщеніе, перпендикулярное къ поверхности уровня. Начальная точка этого перемѣщенія принадлежитъ поверхности уровня, построенной для давленія p, а конечная точка — поверхности уровня, построенной для давленія $p + \partial p$, гдѣ ∂p не нуль, такъ какъ ∂s теперь не совпадаетъ съ поверхностью уровня, но ей перпендикулярно. Приращеніе ∂p, соотвѣтствующее такому перемѣщенію, опредѣлится по уровненію (12), когда примемъ въ немъ $\cos(R, \partial s) = \pm 1$, такъ какъ теперь R и ∂s параллельны по направленію. И такъ имѣемъ $\pm \partial p = \mu R \partial s$, откуда

$$\partial s = \pm \frac{\partial p}{\mu R}.$$

Здѣсь ∂s представляетъ разстояніе двухъ смежныхъ поверхностей уровня и, какъ это видно изъ предыдущаго выраженія, это разстояніе не можетъ обращаться въ нуль, такъ какъ ∂p не нуль, а μ и R ни для одной изъ точекъ жидкости не обращаются въ безконечность. Слѣдовательно, двѣ различныхъ поверхности уровня не могутъ имѣть общихъ точекъ, т.-е. не могутъ ни пересѣкаться, ни соприкасаться между собою.

7. Для примѣра опредѣлимъ форму поверхностей уровня въ нѣкоторыхъ случаяхъ особенно замѣчательныхъ.

Случай 1. Тяжелая жидкость заключена въ сосудѣ, при чемъ жидкость эта и сосудъ неподвижны.

Располагая координатныя оси x и y въ горизонтальной плоскости, а ось z, направляя сверху внизъ, получимъ, для проэкцій ускоренія g силы тяжести, выраженія

$$X = 0,\ \ Y = 0 \text{ и } Z = g;$$

поэтому дифференціальное уравненіе поверхности уровня будетъ

$$g\partial z = 0, \text{ или } \partial z = 0;$$

слѣдовательно, конечное уравненіе поверхности уровня будетъ

$$z = \text{const}.$$

то-есть, въ разсматриваемомъ случаѣ *поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости.* Понятно, что если свободная поверхность жидкости во всѣхъ точкахъ будетъ подвержена одинаковому внѣшнему давленію, то она будетъ поверхностью уровня, а слѣдовательно, будетъ такъ же горизонтальною плоскостью.

Случай 2. Всѣ точки неподвижной жидкости притягиваются къ одному неподвижному центру, по закону, выражающемуся нѣкоторою функціею разстоянія отъ притягиваемой точки до центра притяженія.

Расположимъ начало координатъ въ центрѣ притяженія и назовемъ чрезъ x, y, z координаты нѣкоторой точки жидкости, чрезъ r разстояніе этой точки отъ центра притяженія и чрезъ $f(r)$ законъ притяженія, т.-е. ускореніе притягивающей силы. Замѣчая, что направленіе этой силы совпадаетъ съ направленіемъ r, получаемъ для проэкцій ускоренія $f(r)$ выраженія:

$$X = f(r)\frac{x}{r},\ \ Y = f(r)\frac{y}{r},\ Z = f(r)\frac{z}{r};$$

слѣдовательно, дифференціальное уравненіе поверхности уровня будетъ

$$\frac{f(r)}{r}(xdx + ydy + zdz) = 0 \text{ или } xdx + ydy + zdz = 0;$$

откуда получаемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = C.$$

то-есть въ разсматриваемомъ случаѣ *поверхности уровня суть сферы.*

Случай 3. Тяжелая жидкость заключена въ сосудѣ, вращающемся вмѣстѣ съ нею равномѣрно около вертикальной оси.

Направимъ ось z по оси вращенія сверху внизъ и назовемъ чрезъ $\tilde{\omega}$ постоянную угловую скорость вращенія и чрезъ r разстояніе нѣкоторой точки жидкости отъ оси вращенія. Каждая точка жидкости будетъ подвержена двумъ внѣшнимъ силамъ: силѣ тяжести, коей ускореніе g, и центробѣжной, коей ускореніе равно $\frac{(\tilde{\omega}r)^2}{r} = \tilde{\omega}^2 r$. Направленіе этого послѣдняго ускоренія совпадаетъ съ направленіемъ разстоянія r, считаемаго отъ оси вращенія къ разсматриваемой точкѣ жидкости. X, Y и Z, какъ проэкціи равнодѣйствующаго ускоренія, будутъ равны каждое суммѣ проэкцій составляющихъ, то-есть

$$X = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,\ x) + g \cos(g,\ x)$$
$$Y = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,\ y) + g \cos(g,\ y)$$
$$Z = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,\ z) + g \cos(g,\ z).$$

$$\cos(r,\ x) = \frac{x}{r},\ \cos(r,\ y) = \frac{y}{r} \text{ и } \cos(r,\ z) = 0;$$
$$\cos(g,\ x) = 0,\ \cos(g,\ y) = 0 \text{ и } \cos(g,\ z) = 1;$$

поэтому $$X = \tilde{\omega}^2 x,\ Y = \tilde{\omega}^2 y \text{ и } Z = g,$$

а дифференціальное уравненіе поверхности уровня будетъ:

$$\tilde{\omega}^2(xdy + ydy) + gdz = 0,$$

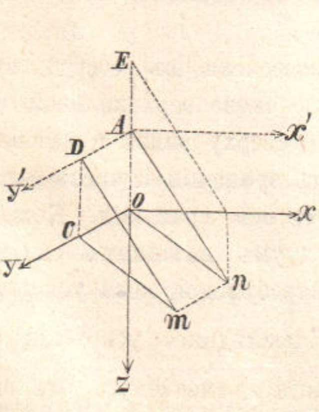
откуда $$\tilde{\omega}^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + gz = C.$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ *поверхности уровня суть параболоиды вращенія*, ось которыхъ совпадаетъ съ осью вращенія сосуда.

Случай 4. Тяжелая жидкость, вмѣстѣ съ сосудомъ ее заключающимъ, вращается равномѣрно около горизонтальной оси, съ угловою скоростью $\tilde{\omega}$.

Направимъ ось y по оси вращенія, а ось z вертикально внизъ и назовемъ буквою r разстояніе mC, нѣкоторой точки m отъ оси вращенія (фиг. 1).

Фиг. 1.



Проэкціи дѣйствующаго ускоренія на координатныя оси будутъ:

$$X = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,x) + g\cos(gx) = \tilde{\omega}^2 x$$
$$Y = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,y) + g\cos(g,y) = 0$$
$$Z = \tilde{\omega}^2 r \cos(r,z) + g\cos(g,z) = \tilde{\omega}^2 z + g.$$

Дифференціальное уравненіе поверхности уровня будетъ:

$$\tilde{\omega}^2(xdx + zdz) + gdz = 0.$$

Интегралъ этого уравненія доставитъ

$$\tilde{\omega}^2(x^2+z^2)+2gz=C,$$

Слѣдовательно *поверхности уровня суть цилиндры съ круговымъ основаніемъ*, ось которыхъ параллельна оси вращенія сосуда. Для опредѣленія положенія оси этихъ цилиндровъ, перенесемъ начало координатъ O въ нѣкоторую точку A, лежащую на оси отрицательныхъ z-овъ и новыя оси x', y' и z' сдѣлаемъ параллельными прежнимъ. Тогда, обозначая разстояніе OA чрезъ k, получимъ: $x=x'$, $y=y'$ и $z=z'-k$ и уравненіе цилиндра приметъ видъ:

$$\tilde{\omega}^2[x'^2+(z'-k)^2]+2g(z'-k)=C$$

или $$\tilde{\omega}^2(x'^2+z'^2)+2(g-k\tilde{\omega}^2)z'=C+2gk-\tilde{\omega}^2k^2$$

Слѣдовательно, избирая k такъ, чтобы было $g-k\tilde{\omega}^2=0$, получимъ для уравненія цилиндра

$$x'^2+z'^2=\frac{C}{\tilde{\omega}^2}+\left(\frac{g}{\tilde{\omega}^2}\right)^2$$

и координатная ось y' будетъ совпадать съ осью цилиндра. Изъ условія $g-k\tilde{\omega}^2=o$, для разстоянія оси цилиндра отъ оси вращенія получаемъ

$$k=\overline{OA}=\frac{g}{\tilde{\omega}^2};$$

а для опредѣленія радіуса R цилиндра будемъ имѣть выраженіе

$$R^2=\frac{C}{\tilde{\omega}^2}+\frac{g^2}{\tilde{\omega}^4}=x^2+\left(z+\frac{g}{\tilde{\omega}^2}\right)^2=x^2+z^2+2\frac{g}{\tilde{\omega}^2}z+\left(\frac{g}{\tilde{\omega}^2}\right)^2.$$

Выраженіе это можно было бы получить и изъ чертежа, разрѣшая треугольникъ BOE. Такъ какъ $x^2+z^2=r^2$, то послѣднее выраженіе для R^2 можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$R^2=r^2+\left(\frac{g}{\tilde{\omega}^2}\right)^2+2g\frac{z}{\tilde{\omega}^2}.$$

Такъ какъ это выраженіе содержитъ координату z, мѣняющуюся во время вращенія сосуда, то заключаемъ, что радіусъ цилиндра съ теченіемъ времени мѣняется, а слѣдовательно мѣняется съ теченіемъ времени и постоянный параметръ C, равный $\tilde{\omega}^2\left(R^2 - \frac{g^2}{\tilde{\omega}^4}\right)$, входящій во вторую часть уравненія поверхности уровня; то-есть разсматриваемая частица жидкости, во время вращенія сосуда, постоянно переходитъ съ одной поверхности уровня на другую, а слѣдовательно подвергается безпрестанно измѣняющемуся гидростатическому давленію.

Приложенія къ тяжелымъ жидкостямъ.

8. Положимъ, что въ сосудѣ имѣется тяжелая однородная жидкость, находящаяся въ состояніи равновѣсія. Располагая координатную плоскость (xy) горизонтально, а ось z направляя сверху внизъ, будемъ имѣть $X = o$, $Y = o$ и $Z = g$, а слѣдовательно $dp = g\mu dz$, откуда

$$p = g\mu z + C.$$

Для опредѣленія постоянной C положимъ, что свободная поверхность жидкости, на всемъ своемъ протяженіи, подвержена одинаковому внѣшнему давленію. Обозначая это послѣднее давленіе, отнесенное къ единицѣ площади, чрезъ P и предполагая, что разстояніе свободной поверхности, какъ горизонтальной поверхности уровня, отъ горизонтальной же плоскости (xy), равно z_0, получимъ изъ найденнаго выше выраженія

$$P = g\mu z_0 + C$$

а слѣдовательно $$p = P + g\mu(z - z_0) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Здѣсь $z - z_0$ представляетъ глубину погруженія разсматриваемой частицы подъ свободною поверхностью и вмѣстѣ съ тѣмъ объемъ призмы, имѣющей основаніемъ площадь равную единицѣ плоскостной мѣры, а высоту равную $z - z_0$; $g\mu$ представляетъ вѣсъ единицы объема жидкости, который мы во всѣхъ послѣдующихъ вычисленіяхъ будемъ обозначать чрезъ Δ *). Такимъ

*) Такъ какъ одинъ кубическій метръ воды вѣситъ 1000 килограммовъ, то для воды $\Delta = 1000$.

образомъ послѣднее выраженіе показываетъ, что *гидростатическое давленіе тяжелой жидкости, въ данной точкѣ, равняется давленію, дѣйствующему на единицѣ площади свободной поверхности, сложенному съ вѣсомъ такого столба жидкости, основаніе котораго равно единицѣ плоскостной мѣры, а высота равна глубинѣ погруженія точки подъ свободною поверхностью.*

Существованіе члена P въ формулѣ (13), имѣющей мѣсто для всякой точки жидкости, доказываетъ, что *жидкое тѣло обладаетъ свойствомъ передавать внѣшнее давленіе, приложенное къ его поверхности, всѣмъ остальнымъ своимъ точкамъ, то-есть, во всѣ стороны и притомъ съ равною силою на равныя площади.*

Не слѣдуетъ думать, что этимъ замѣчательнымъ свойствомъ обладаетъ только тяжелая жидкость. Свойство это сохраняется, при какихъ угодно объемныхъ силахъ приложенныхъ къ частицамъ жидкости. Дѣйствительно, опредѣляя въ самой общей формулѣ (10) постоянную произвольную C по условію, что внѣшнее давленіе на единицу площади въ нѣкоторой точкѣ ограничивающей поверхности, коей координаты суть x_0, y_0 и z_0, есть P, получаемъ

$$P = F(x_0, y_0, z_0) + C$$

и

$$p = P + F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0),$$

гдѣ внѣшнее давленіе P опять является какъ одна изъ составныхъ частей гидростатическаго давленія p въ точкѣ (x, y, z).

На указанномъ свойствѣ жидкости основано въ практикѣ устройство механизма, извѣстнаго подъ названіемъ *гидравлическаго пресса.* Механизмъ этотъ, изобрѣтенный Паскалемъ, долгое время существовалъ только въ физическихъ кабинетахъ какъ приборъ для опытнаго подтвержденія указаннаго свойства жидкостей и только впослѣдствіи, когда Брама изобрелъ кожанную набивку для насосныхъ поршней, носящую его имя, приборъ этотъ перешелъ на фабрики и заводы какъ механизмъ, при помощи котораго можно производить чрезвычайно сильныя давленія.

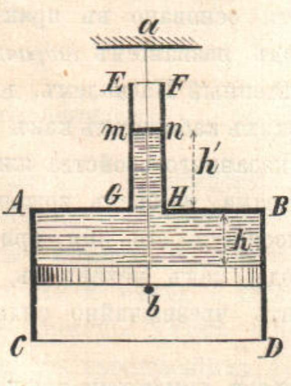
9. Положимъ, что сосудъ, въ которомъ заключена жидкость, имѣетъ плоское горизонтальное дно, площадь котораго равна a, а глубина погруженія его подъ свободною поверхностью уровня

равна h; тогда для давленія на дно получаемъ выраженіе $aP + g\mu ah = aP + \Delta ah$, въ которомъ aP представляетъ внѣшнее давленіе, переданное дну отъ свободной поверхности черезъ жидкость, а членъ Δah — давленіе, происходящее отъ собственнаго вѣса жидкости. Остановимъ наше вниманіе на этомъ послѣднемъ членѣ. Изъ него видимъ, что давленіе на дно сосуда отъ собственнаго вѣса жидкости происходящее зависитъ только отъ величины площади дна и высоты опирающагося на него столба жидкости и нисколько не зависитъ отъ формы и расположенія стѣнокъ, а слѣдовательно и отъ полнаго количества жидкости, находящейся въ сосудѣ. Такимъ образомъ, при тѣхъ же значеніяхъ для a и h, два сосуда, заключающіе одинаковую жидкость, изъ коихъ одинъ кверху расширяется, а другой съуживается, будутъ испытывать одинаковое давленіе на дно, между тѣмъ какъ полный вѣсъ жидкости заключающейся въ первомъ сосудѣ будетъ болѣе давленія на дно, а во второмъ — менѣе.

Въ слѣдующемъ опытѣ весьма наглядно обнаруживается то обстоятельство, что давленіе жидкости на извѣстную площадь зависитъ только отъ величины этой площади и глубины ея погруженія подъ свободною поверхностью.

Сосудъ составленъ изъ соединенія двухъ цилиндровъ $ABCD$ и $EFGH$, имѣющихъ общую геометрическую ось (фиг. 2). Въ большомъ цилиндрѣ, который въ то же время есть нижнимъ, помѣщенъ поршень MN, представляющій собою какъ бы подвижное дно сосуда. Чрезъ открытый конецъ EF верхняго цилиндра наливаютъ въ сосудъ нѣкоторое количество воды и весь приборъ подвѣшиваютъ на проволокѣ ab, прикрѣпленной концомъ b, къ рединѣ поршня. Когда приборъ будетъ предоставленъ самому себѣ, онъ вмѣстѣ съ водою остановится въ равновѣсіи въ извѣстномъ положеніи, которое не трудно опредѣлить.

Фиг. 2.



Пусть будетъ q вѣсъ сосуда, Q — вѣсъ находящейся въ немъ воды, a — площадь поперечнаго сѣченія верхняго цилиндра $EFHG$, A — площадь такого же сѣченія нижняго цилиндра (т.-е. площадь поршня MN), h' — высота Hn, стоянія воды, въ моментъ равновѣсія въ меньшемъ цилиндрѣ и h — разстояніе крышки AB отъ поршня, въ это же время.

Единственное усиліе, заставляющее сосудъ падать внизъ, есть его собственный вѣсъ q, усилія же, удерживающія сосудъ отъ паденія, суть давленіе воды на крышку AB, дѣйствующее снизу вверхъ, и незначительное треніе, существущее между поршнемъ и стѣнками сосуда, которымъ мы пренебрежемъ для большей простоты. Но давленіе воды на крышку должно равняться вѣсу такого столба воды, площадь основанія котораго равна площади крышки, а высота равна h', слѣдовательно это давленіе будетъ $\Delta\,(A - a)\,h'$, а потому, въ случаѣ равновѣсія,

$$q = \Delta(A - a)h' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Съ другой стороны, сосудъ, вода и поршень удерживаются отъ паденія проволокою, поэтому усиліе ее растягивающее должно равняться суммѣ $Q + q + k$, гдѣ k есть вѣсъ поршня, и это же усиліе должно равняться вѣсу k поршня сложенному съ давленіемъ на него воды, т.-е. съ количествомъ $\Delta A\,(h + h')$, а потому

$$Q + q = \Delta A(h + h') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Исключая изъ уравненій (a) и (b) количество q получимъ

$$Q = \Delta A(h + h') - \Delta(A - a)h'$$

или

$$Q = \Delta Ah + \Delta ah' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Это послѣднее выраженіе могло бы быть получено непосредственно, безъ помощи формулъ, опредѣляющихъ гидростатическое давленіе, такъ какъ ΔAh есть вѣсъ объема воды, заключеннаго въ большемъ цилиндрѣ, а $\Delta ah'$ есть вѣсъ объема, находящагося въ меньшемъ цилиндрѣ. Изъ формулы (a) видимъ, что высота h', а слѣдовательно и объемъ $mnHG$ не зависятъ отъ полнаго вѣса Q воды, находящейся въ приборѣ, а зависятъ только отъ вѣса q

прибора и размѣровъ крышки AB; поэтому, если увеличимъ количество Q приливая въ приборъ воды чрезъ оконечность EF, то все вновь прибавленное количество должно помѣститься въ цилиндрѣ $ABCD$, а слѣдовательно сосудъ долженъ подвинуться вверхъ чтобы освободить надъ поршнемъ мѣсто для прибавленнаго объема. Это послѣднее заключеніе, вытекающее какъ слѣдствіе изъ теоретическихъ соображеній, вполнѣ подтверждается во время опыта.

10. Перейдемъ теперь къ опредѣленію давленія на плоскую, но не горизонтальную стѣнку сосуда. Разобьемъ всю площадь a стѣнки на безконечно-малые элементы второго порядка и пусть ∂a будетъ глубина погруженія его центра тяжести подъ свободною поверхностью жидкости. Давленіе на этотъ элементъ будетъ равно $P\partial a + \Delta z \partial a$, а слѣдовательно полное давленіе на стѣнку, которое мы обозначимъ буквою R, будетъ опредѣляться интеграломъ

$$R = P\int \partial a + \Delta \int z \partial a.$$

Но $\int \partial a = a$ и $\int z \partial a = a z_0$, гдѣ z_0 есть координата центра тяжести стѣнки, т.-е. глубина погруженія этаго центра подъ свободною поверхностью.

И такъ имѣемъ

$$R = Pa + \Delta a z_0 \qquad (14)$$

Отсюда видимъ, что давленіе на плоскую, но негоризонтальную стѣнку, равно давленію на такую же по величинѣ площадь свободной поверхности, сложенному съ вѣсомъ столба жидкости, основаніе котораго равно площади стѣнки, а высота равна глубинѣ погруженія центра тяжести стѣнки подъ свободною поверхностью. Давленіе это не зависитъ отъ угла наклоненія стѣнки внутри жидкости; давленіе остается по величинѣ тоже, если только глубина погруженія центра тяжести останется тою же.

Такъ какъ давленія на равные по величинѣ элементы стѣнки увеличиваются по мѣрѣ увеличенія глубины погруженія центровъ этихъ элементовъ, то очевидно, что точка приложенія полнаго довленія R несовпадаетъ съ центромъ тяжести стѣнки, но необходимо лежитъ ниже сего послѣдняго, если только стѣнка не горизонтальна. Для опредѣленія этой точки приложенія, которую мы будемъ называть *центромъ давленія*, отнесемъ стѣнку къ координатнымъ осямъ, разсматривая координату z какъ глубину погруженія точки подъ свободною поверхностью, то-есть располагая оси x и y въ свободной поверхности, а ось z направляя сверху внизъ.

Пусть будутъ x_1, y_1 и z_1 искомыя координаты центра давленія, а x_0, y_0 и z_0—данныя координаты центра тяжести стѣнки, тогда, по извѣстнымъ формуламъ для опредѣленія координатъ центра параллельныхъ силъ, получимъ

$$Rx_1 = P\int x\,da + \Delta\int zx\,da,\quad \int x\,da = x_0 a$$
$$Ry_1 = P\int y\,da + \Delta\int zy\,da,\quad \int y\,da = y_0 a$$
$$Rz_1 = P\int z\,da + \Delta\int z^2\,da,\quad \int z\,da = z_0 a$$

гдѣ R опредѣляется формулою (14).

Примемъ для краткости

$$\Delta z_0 = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\int zx\,da = az_0 x',\ \int zy\,da = az_0 y' \text{ и } \int z^2\,da = az_0 z' \quad . \quad (16)$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} Rx_1 &= Pax_0 + Qax' \\ Ry_1 &= Pay_0 + Qay' \\ Rz_1 &= Paz_0 + Qaz' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ
$$R = Pa + \Delta az_0 = (P + Q)a.$$

Изъ этихъ послѣднихъ формулъ видно, что x', y' и z' опредѣляемыя формулами (16), суть координаты центра давленія, происходящаго только отъ собственнаго вѣса жидкости, между тѣмъ какъ x_1, y_1 и z_1 суть координаты центра давленія, происходящаго какъ отъ вѣса жидкости, такъ и отъ внѣшняго давленія, переданнаго стѣнкѣ жидкостью.

Въ формулахъ (16) можно вмѣсто разстояній z, считаемыхъ отъ свободной поверхности по вертикали, ввести пропорціональныя имъ разстоянія, считаемыя отъ прямой пересѣченія свободной поверхности съ продолженіемъ плоскости стѣнки. Дѣйствительно, называя чрезъ ζ разстояніе нѣкоторой точки стѣнки отъ этой послѣдней прямой и чрезъ α уголъ наклоненія плоскости стѣнки къ горизонту, получимъ

$$z = \zeta \sin\alpha, \; z_0 = \zeta_0 \sin\alpha \text{ и } z' = \zeta' \sin\alpha,$$

а потому вмѣсто формулъ (16) можно взять слѣдующія

$$\int \zeta x d a = a\zeta_0 x', \; \int \zeta y d a = a\zeta_0 y' \text{ и } \int \zeta^2 d a = a\zeta_0\zeta' . \quad (18)$$

Изъ этихъ послѣднихъ формулъ видно, что относительное положеніе центра давленія, отъ собственнаго вѣса жидкости происходящаго, и прямой пересѣченія плоскости стѣнки съ плоскостью свободной поверхности совершенно то же, что и расположеніе центра колебанія физическаго маятника и его оси привѣса, или—центра удара тѣла и его добровольной оси вращенія.

11. Перейдемъ теперь къ опредѣленію давленія на криволинейную стѣнку.

Пусть da будетъ элементъ площади криволинейной стѣнки, а pda—давленіе на него жидкости. Проектируя это давленіе на три взаимно перпендикулярныя оси x, y и z, получимъ для проэкцій:

$$p \cos(n, x) da, \; p \cos(n, y) da \text{ и } p \cos(n, z) da,$$

гдѣ n есть направленіе нормали къ элементу и вмѣстѣ съ тѣмъ направленіе давленія pda.

Обозначая чрезъ R равнодѣйствующую давленій, приложенныхъ къ элементамъ разсматриваемой стѣнки,—чрезъ L, M и N проэкціи на оси главнаго линейнаго момента этихъ давленій и принимая для краткости письма

$$\cos(n, x) = \alpha, \; \cos(n, y) = \beta \text{ и } \cos(n, z) = \gamma$$

получимъ:

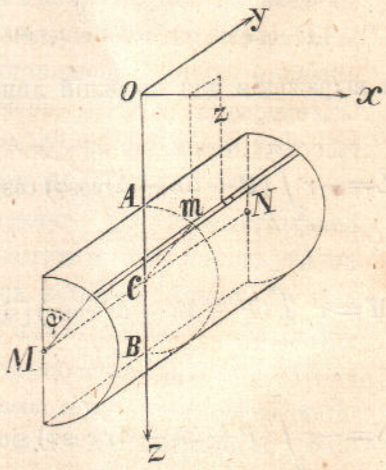
$$\left.\begin{aligned} R\cos(R, x) &= \int p\alpha da, \quad L = \int p(\gamma y - \beta z) da \\ R\cos(R, y) &= \int p\beta da, \quad M = \int p(\alpha z - \gamma x) da \\ R\cos(R, z) &= \int p\gamma da, \quad N = \int p(\beta x - \alpha y) da \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19)$$

Наконецъ, обозначая чрезъ x', y' и z' текущія координаты прямой совпадающей съ равнодѣйствующею R, получимъ слѣдующія уровненія этой прямой:

$$\left.\begin{aligned} y'\int p\gamma da - z'\int p\beta da &= \int p(\gamma y - \beta z) da \\ z'\int p\alpha da - x'\int p\gamma da &= \int p(\alpha z - \gamma x) da \\ x'\int p\beta da - y'\int p\alpha da &= \int p(\beta x - \alpha y) da \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20)$$

Въ уравненіяхъ (19) и (20) направленіе взаимно-перпендикулярныхъ осей x, y и z совершенно произвольно, но если въ эти уравненія вмѣсто p внесемъ равную ему величину $P + \Delta z$, то ось z должно направить по отвѣсной линіи сверху внизъ, а оси x и y расположить въ свободной поверхности.

Фиг. 3.



Для примѣра опредѣлимъ давленіе на боковую поверхность полуцилиндра, погруженнаго въ жидкость такимъ образомъ, что ось его MN горизонтальна, а діаметральное сѣченіе $MABN$ есть вертикальная плоскость (фиг. 3). Пусть r будетъ радіусъ цилиндра и l его длина. Расположимъ координатныя оси такимъ образомъ, чтобы плоскость (yz) совпала съ діаметральнымъ сѣченіемъ $MABN$, а плоскоскость (xz)—съ плоскостью AmB поперечнаго сѣченія, проходящаго чрезъ средину длины цилиндра и наконецъ плоскость (xy)—съ плоскостью свободной поверхности жидкости. За элементъ поверхности примемъ элементъ, заключающійся между двумя смѣжными поперечными сѣченіями и двумя безконечно-близкими производящими. Слѣдовательно, обозначая уголъ ACm чрезъ φ, получимъ:

$$d\alpha = rd\varphi dy,\ \alpha = \sin\varphi,\ \beta = 0 \text{ и } \gamma = -\cos\varphi.$$

Наконецъ, называя буквою h глубину погруженія оси цилиндра подъ свободною поверхностью, будемъ имѣть:

$$z = h - r\cos\varphi,\ x = r\sin\varphi \text{ и } p = P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi.$$

Формулы, опредѣляющія проекціи равнодѣйствующаго давленія R на координатныя оси, будутъ

$$R\cos(R,x) = r\int_0^\pi (P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy.$$

$$R\cos(R,y) = 0$$

$$R\cos(R,z) = -r\int_0^\pi (P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy,$$

а выраженія для проекцій линейнаго момента будутъ

$$L = -r\int_0^\pi (P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$M = r\int_0^\pi (P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi)[\sin\varphi(h - r\cos\varphi) + r\sin\varphi\cos\varphi]d\varphi\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy$$

$$N = -r\int_0^\pi (P + \Delta h - \Delta r\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} ydy.$$

Но входящіе въ эти формулы интегралы имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy = l,\quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y dy = 0,\quad \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 2,\quad \int_0^\pi \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos\varphi d\varphi = 0 \text{ и } \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\pi;$$

поэтому имѣемъ:

$$R\cos(R,\ x) = 2lr(R + \Delta h)$$
$$R\cos(R,\ y) = 0$$
$$R\cos(R,\ z) = \frac{\Delta}{2}\pi r^2 l$$

$$L = 0,\ M = 2lrh(P + \Delta h),\ N = 0;$$

причемъ, изъ уравненій (20), для уравненій прямой линіи, сливающейся съ равнодѣйствующею R, получаемъ:

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad (z' - h)(P + \Delta h) = \frac{\pi}{4} rx'.$$

Изъ полученныхъ выраженій видимъ, что давленіе R лежитъ въ плоскости средняго поперечнаго сѣченія AmB и направленіе его проходитъ чрезъ точку C, опредѣляемую координатами $x' = o$, $y' = o$ и $z' = h$. Горизонтальная составляющая этого давленія равна давленію на діаметральное сѣченіе $MABN$, а вертикальная составляющая равна вѣсу такого объема жидкости, который можетъ помѣститься въ полуцилиндрѣ $MAmBN$.

Относительно выраженія, полученнаго для горизонтальной составляющей давленія R, полезно замѣтить, что какова бы ни была кривая поверхность, давленіе на которую ищемъ, всегда *проекція этого давленія на какое-либо горизонтальное направленіе* λ *будетъ равно тому давленію, какое испытываетъ проекція кривой поверхности на вертикальную плоскость, перпендикулярную къ* λ. Дѣйствительно, всякій элементъ da_n кривой поверхности, перпендикулярный къ нѣкоторому направленію n, и его проекція da_λ на вертикальную плоскость, перпендикулярную къ λ, будутъ находиться на одинаковой глубинѣ подъ свободною поверхностью, а слѣдовательно будутъ подвержены одинаковому давленію p на единицѣ площади, т.-е. давленія на нихъ будутъ pda_n и pda_λ; но $da_\lambda = da_n \cos(n, \lambda)$, поэтому

$$pda_\lambda = pda_n \cos(n, \lambda)$$

или, такъ какъ pda_n совпадаетъ по направленію съ n,

$$pda_\lambda = pda_n \cos(pda_n, \lambda).$$

Первая часть этого равенства представляетъ давленіе на проэкцію da_λ, а вторая часть—проекцію давленія pda_n на направленіе λ, и такъ какъ подобное равенство будетъ имѣть мѣсто для каждаго элемента поверхности, то оно сохранится и для поверхности конечныхъ размѣровъ.

12. Перейдемъ теперь къ случаю тяжелой неоднородной жидкости.

Располагая, какъ и прежде, координатную ось z по вертикали сверху внизъ, получимъ для гидростатическаго давленія формулы

$$dp = g\mu dz = \Delta dz \quad \text{и} \quad p = g\int \mu dz + C = \int \Delta dz + C,$$

въ которыхъ μdz, или Δdz должно быть полнымъ дифференціаломъ, а слѣдовательно μ или Δ *должно зависѣть только отъ координаты* z; то-есть, въ случаѣ равновѣсія тяжелой неоднородной жидкости, частицы одной и той же горизонтальной поверхности уровня должны имѣть и одинаковую плотность, которая, слѣдовательно, можетъ мѣняться только при переходѣ отъ одной поверхности уровня къ другой. Законъ, сообразно которому должна мѣняться плотность μ съ измѣненіемъ глубины z, то-есть видъ функціи, опредѣляющей зависимость μ отъ z, не опредѣляется теоріею и, повидимому, можетъ быть какой угодно. На самомъ дѣлѣ, однако, для устойчивости равновѣсія необходимо, чтобы *плотность* μ *возрастала по мѣрѣ увеличенія глубины* z. Такимъ образомъ, если сосудъ будетъ заключать нѣсколько различныхъ несмѣшивающихся между собою капельвыхъ жидкостей, то въ состояніи равновѣсія жидкости расположатся горизонтальными слоями, при чемъ наиболѣе плотная жидкость займетъ нижнюю часть сосуда, а наиболѣе легкая—верхнюю.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ будутъ плотности жидкостей, находящихся въ сосудѣ и $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$—толщины слоевъ этихъ жидкостей; тогда давленіе на единицу площади дна изобразится формулою

$$p = P + g\Sigma\mu h.$$

Обозначая $h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \Sigma h$ чрезъ H и опредѣляя μ_0 по формулѣ $\mu_0 H = \Sigma\mu h$, получимъ для предыдущаго давленія выраженіе:

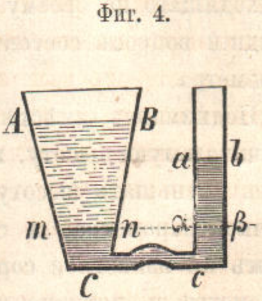
$$p = P + g\mu_0 H, \quad \text{гдѣ} \quad \mu_0 = \frac{\Sigma\mu h}{\Sigma h}$$

представляетъ нѣкоторую среднюю плотность изъ плотностей всѣхъ жидкостей, содержащихся въ сосудѣ. Эта средняя плотность будетъ равна средней ариѳметической только въ томъ случаѣ, когда толщины $h_1, h_2, \ldots h_n$ слоевъ будутъ равны между собою.

Не трудно теперь отдать себѣ отчетъ въ томъ, каковы должны быть обстоятельства равновѣсія двухъ различныхъ не смѣшивающихся жидкостей, заключенныхъ въ двухъ сообщающихся между собою сосудахъ.

Пусть mn будетъ поверхность, отдѣляющая одну жидкость отъ другой (фиг. 4). Поверхность эта, какъ было доказано выше, должна быть горизонтальною плоскостью; ниже плоскости mn въ сосудѣ ABC должна находиться тяжелѣйшая жидкость, плотность которой мы обозначимъ чрезъ μ', а выше mn — легчайшая, плотность которой пусть будетъ μ. Если теперь предположимъ, что въ сосудѣ abc находится только одна жидкость съ плотностью μ', то частицы горизонтальной плоскости $mn\alpha\beta$, будучи одинаковой плотности, будутъ въ то же время принадлежать и одной и той же поверхности уровня; поэтому, обозначая чрезъ h толщину слоя $ABmn$, чрезъ h' толщину слоя $ab\alpha\beta$, получимъ для гидростатическихъ

Фиг. 4.



давленій на mn и $\alpha\beta$ выраженія $P + g\mu h$ и $P + g\mu' h'$, а потому $g\mu h = g\mu' h'$, или $\Delta h = \Delta' h'$, откуда

$$\mu : \mu' = \Delta : \Delta' = h' : h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

Слѣдовательно, *толщины слоевъ жидкостей, считаемыя отъ плоскости раздѣла, должны быть обратно пропорціональны плотностямъ.*

Этотъ законъ даетъ въ практикѣ весьма удобный способъ для опредѣленія относительныхъ плотностей не смѣшивающихся между собою жидкостей.

13. На законахъ равновѣсія двухъ жидкостей, заключающихся въ сообщающихся сосудахъ, основано устройство прибора извѣстнаго подъ именемъ *барометра,* въ которомъ атмосферный столбъ уравновѣшивается столбикомъ какой-либо капельной жидкости—обыкновенно ртути. Приборъ этотъ даетъ возможность по высотѣ столбика ртути опредѣлить давленіе атмосферы и, если бы намъ извѣстенъ былъ законъ, сообразно которому уменьшается плотность воздуха, по мѣрѣ удаленія отъ земной поверхности, то по высотѣ столбика ртути въ барометрѣ можно было бы опредѣлить толщину слоя атмосферы, окружающаго землю. По незнанію вышеупомянутаго закона мы не можемъ рѣшить этого вопроса сколько-нибудь удовлетворительно. хотя въ то же время оказывается возможнымъ рѣшеніе, съ достаточною для практики точностью, другого вопроса, близко подходящаго по своему характеру къ предыдущему. Этотъ послѣдній вопросъ состоитъ въ опредѣленіи высотъ посредствомъ барометра.

Поднимаясь вмѣстѣ съ барометромъ на болѣе или менѣе значительную высоту, напр. на вершину высокой горы, мы будемъ уменьшать высоту атмосфернаго столба, стоящаго надъ чашечкой барометра, а слѣдовательно должна уменьшаться при этомъ въ извѣстной соразмѣрности и высота столбика ртути въ барометрѣ и, понятно, что изъ величины уменьшенія этого столбика можно заключить о пройденной нами, по вертикальному направленію, высотѣ.

Достаточно точное рѣшеніе вопроса о *нивеллированіи посредствомъ барометра,* несмотря на незнаніе закона распредѣленія плотностей въ слояхъ атмосферы, оказывается потому возможнымъ, что измѣряемые нами такимъ образомъ высоты могутъ считаться незначительными въ сравненіи съ земнымъ радіусомъ, чего нельзя сказать относительно толщины всего слоя атмосферы, окружающей землю.

Обратимся теперь къ выводу формулы, могущей служить для опредѣленія высотъ посредствомъ барометрическихъ наблюденій.

Реньо нашелъ, что одинъ кубическій метръ сухого воздуха, при температурѣ 0° С. и при атмосферномъ давленіи, равномъ 10336 килограммовъ на квадратный метръ (при высотѣ барометра въ 760 $\frac{m}{m}$) вѣситъ 1,293187 килограммовъ въ мѣстности, географическая широта которой равна 45° (въ Парижѣ) и которая находится на высотѣ морского уровня. Если же давленіе будетъ вообще p килограммовъ на квадратный метръ и температура воздуха будетъ t градусовъ Цельзія, то вѣсъ кубическаго метра воздуха, по законамъ Маріота и Гайлюссака, будетъ равенъ $1.293187 \, \frac{p}{10336} \cdot \frac{1}{1+\delta t}$. Если при этомъ мѣстность, въ которой производится опытъ, будетъ находиться на высотѣ z метровъ, считая отъ уровня моря, то по закону Ньютона, вѣсъ кубическаго метра воздуха будетъ равенъ

$$1{,}293187 \, \frac{p}{10336} \cdot \frac{1}{1+\delta t} \cdot \left(\frac{r}{r+z}\right)^2,$$

гдѣ r есть средній радіусъ земного шара, равный 6366198 метровъ. Наконецъ, если широта мѣста будетъ не 45°, но вообще φ, то согласно съ Біотъ'омъ вѣсъ кубическаго метра воздуха будетъ выражаться формулою:

$$g\mu = 1{,}293187 \, \frac{p}{10336} \cdot \frac{1}{1+\delta t} \cdot \frac{r^2}{(r+z)^2} \Big(1 - 0{,}002837 \cos(2\varphi)\Big)$$

или, принимая, для краткости письма,

$$k = \frac{10336}{1{,}293187} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}002837 \cos(2\varphi)} = \frac{7992{,}655}{1 - 0{,}002837 \cos(2\varphi)}$$

получимъ $$g\mu = \frac{r^2}{(r+z)^2} \cdot \frac{p}{k(1+\delta t)} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Располагая координатную плоскость (xy) въ горизонтальной плоскости уровня моря данной мѣстности и направляя ось z снизу вверхъ, получимъ для dp выраженіе

$$dp = - g\mu dz = - \frac{pr^2 \partial z}{k(r+z)^2 \, (1+\delta t)}$$

или, по раздѣленіи на p,

$$\frac{dp}{p} = d \operatorname{lognat} p = - \frac{r^2}{k(1+\delta t)} \cdot \frac{\partial z}{(r+z)^2}$$

Для возможности интегрированія послѣдняго выраженія должна быть извѣстна зависимость температуры t воздуха отъ высоты z. Не зная этой зависимости, мы совершимъ интегрированіе предполагая что количество $1 + \delta t$ есть величина постоянная, но для уменьшенія могущей произойти отъ этого погрѣшности, замѣнимъ температуру t нѣкоторою среднею температурою τ, изъ температуръ, соотвѣтствующихъ предѣламъ интегрированія.

Пусть z_0 и z будутъ доступныя для насъ высоты, p_0 и p соотвѣтствующія имъ давленія атмосферы, а t_0 и t наблюдаемыя на этихъ высотахъ температуры воздуха, тогда интегрируя предыдущее выраженіе въ предѣлахъ отъ z_0 до z, получимъ

$$\log\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{r^2}{k(1+\delta t)} \cdot \frac{z - z_0}{(r+z)\;(r+z_0)}$$

или, принимая $z - z_0 = h$, $r + z_0 = R$, слѣдов. $r + z = R + h$,

$$\log\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{hr^2}{k(1+\delta\tau)\, R\, (R+h)}.$$

Пусть b_0 и b будутъ наблюдаемыя высоты барометра въ точкахъ z_0 и z. Если бы въ этихъ точкахъ наблюденій вѣсъ единицы объема ртути былъ одинаковъ, то вмѣсто отношенія $\frac{p_0}{p}$ давленій можно было бы взять отношеніе $\frac{b_0}{b}$, но такъ какъ мѣста z_0 и z наблюденій отличаются между собою во-первыхъ разстояніемъ отъ центра земли, т.-е. напряженіемъ силы тяжести, и во-вторыхъ существующими въ этихъ мѣстахъ температурами, то равенства отношеній $\frac{p_0}{p}$ и $\frac{b_0}{b}$ не существуетъ.

Пусть g_0 и g будутъ ускоренія силы тяжести, а γ_0 γ — плотности ртути въ мѣстахъ наблюденій z_0 и z, тогда будемъ имѣть:

$$p_0 = g_0\gamma_0 b_0 \quad \text{и} \quad p = g\gamma b.$$

слѣдовательно $$\frac{p_0}{p} = \frac{g_0}{g} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma} \cdot \frac{b_0}{b}.$$

Но $$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{r+z}{r+z_0}\right)^2 = \left(\frac{r+z_0+h}{r+z_0}\right)^2 = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2$$

а для опредѣленія отношенія $\frac{\gamma^0}{\gamma}$ имѣемъ данность, полученную Дюлонгомъ и Пти изъ опытовъ надъ расширеніемъ ртути, а именно: при нагрѣваніи ртути на одинъ градусъ Цельзіева термометра, объемъ ея увеличивается на $\frac{1}{5550}$ часть своей первоначальной величины; слѣдовательно

$$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{1+\frac{t}{5550}}{1+\frac{t_0}{5550}} = \frac{1}{1+\frac{t_0-t}{5550+t}}$$

или, по малости t въ сравненіи съ числомъ 5550,

$$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{1}{1+\frac{t_0-t}{5550}}$$

а потому
$$\frac{p_0}{p} = \frac{b_0}{b\left(1+\frac{t_0-t}{5550}\right)}\left(1+\frac{h}{R}\right)^2,$$

а при этомъ предыдущая формула доставитъ:

$$h = k(1+\delta\tau)\frac{R(R+h)}{r^2}\left[\operatorname{lognat}\left(\frac{b_0}{b\left(1+\frac{t_0-t}{5550}\right)}\right) + 2\operatorname{lognat}\left(1+\frac{h}{R}\right)\right]$$

Формулу эту нѣсколько упрощаютъ: во-первыхъ по малости дроби $\frac{h}{R}$, вмѣсто lognat $\left(1+\frac{h}{R}\right)$ берутъ $\frac{h}{R}$, т.-е. ограничиваются первымъ членомъ разложенія Логариѳма отъ $1+\frac{h}{R}$; во-вторыхъ, принимаютъ $R=r$, т.-е. пренебрегаютъ z_0 предъ r. Сверхъ того, по причинѣ не особенно большой разницы въ температурахъ t_0 и t, принимаютъ τ равнымъ средней ариѳметической изъ t_0 и t, наконецъ коэффиціентъ расширенія δ сухого воздуха равный 0,00367, по причинѣ, что воздухъ всегда бываетъ болѣе или менѣе влаженъ, замѣняютъ числомъ 0,004. Сдѣлавъ всѣ указанныя выше упрощенія и замѣняя натуральныя логориѳмы обыкновенными чрезъ умноженіе ихъ на модуль $m = 2{,}302585$, получимъ слѣдующую формулу

$$h = \frac{7992.655m}{1-0{,}002837\cos 2\varphi}\left(1+\frac{t_0+t}{500}\right)\left[\log\left(\frac{b_0}{b\left(1+\frac{t_0-t}{5550}\right)}\right)+\right.$$
$$\left.+0{,}86859\,\frac{h}{r}\right]\left(1+\frac{h}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Въ этой формулѣ число $7992{,}655m = 18437$. Лапласъ, на основаніи сравненія результатовъ доставляемыхъ этою формулою, съ полученными непосредственными измѣреніями нѣкоторыхъ высотъ, предлагаетъ брать вмѣсто числа 18437 число 18336.

Равновѣсіе плавающаго твердаго тѣла.

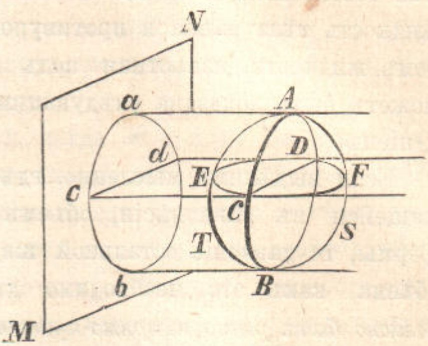
14. Опредѣлимъ давленіе обнаруживаемое однородною жидкостью на поверхность твердаго тѣла погруженнаго въ ней вполнѣ или только частью.

Каждый элементъ $d\alpha$ поверхности тѣла, соприкасающійся съ жидкостью, подверженъ нѣкоторому давленію $pd\alpha$, направленному по нормали къ элементу во внутрь тѣла. Относительно давленій $pd\alpha$ можно доказать слѣдующее предложеніе:

Какова бы нибыла форма поверхности тѣла погруженнаго въ покоющуюся жидкость, всегда алгебрическая сумма проекцій, на какое угодно горизонтальное направленіе, давленій дѣйствующихъ на эту поверхность, равна нулю; сумма же проекцій этихъ давленій на вертикальное направленіе равна и прямо-противуположна вѣсу вытѣсненной тѣломъ жидкости.

Для доказательства первой половины этого предложенія положимъ сначала, что тѣло вполнѣ погружено въ жидкость и, что кривая *ABCDA* (фиг. 5) есть та, по которой происходитъ соприкосновеніе поверхности тѣла съ поверхностью обвертывающаго его цилиндра съ горизонтальными производящими. Пусть *acbda* будетъ проекція кривой *ACBDA* на вертикальную плоскость *MN*, перпендикулярную къ производящимъ цилиндра. Такъ какъ площадь, охваченная сомкнутою кривою *acbda*, будетъ проекціею на эту плоскость *MN* какъ части *ACBDS* поверхности тѣла, такъ и части *ACBDT* этой поверхности, то, на основаніи сказаннаго въ концѣ № 11, проекціи на горизонтальное направленіе, перпендикулярное къ плоскости *MN*, давленій дѣйствующихъ на поверхности *ACBDS* и *ACBDT* должны быть по величинѣ равны между собою. По направленію же эти проекціи, какъ идущія каждая во внутрь тѣла, будутъ прямо противуположны, а потому алгебраическая ихъ сумма будетъ равна нулю, каково бы ни было направленіе горизонтальной оси проекцій.

Фиг. 5.



Изъ только-что сказаннаго видно, что не только равнодѣйствующая горизонтальныхъ давленій, приложенныхъ къ точкамъ поверхности погруженнаго въ жидкость тѣла, равна нулю, но что эти давленія не могутъ образовать и пары поворачивающей тѣло, то-есть, что и *проекція на вертикальное направленіе главнаго линейнаго момента этихъ давленій такъ же равно нулю.* Это послѣднее предложеніе прямо вытекаетъ изъ того, что давленія на поверхности *ACBDS* и *ACBDT*, идущія по перпендикуляру къ вертикальной плоскости *MN*, нетолько равны по величинѣ и прямо-противуположны по направленію, но проходятъ чрезъ одну и ту же токчу, а именно—чрезъ центръ давленія площади *abcd*.

Если тѣло будетъ только частью погружено въ жидкость, напр., если *CEDF* будетъ пересѣченіемъ тѣла горизонтальною свободною поверхностью жидкости, то единственная разница отъ предыдущаго случая будетъ заключаться въ томъ, что вмѣсто поверхностей $ACBDS$ и $ACBDT$ нужно будетъ разсматривать поверхности $CSFDB$ и $CTEDB$, имѣющія опять общую проекцію на плоскость MN, именно площадь $cbdc$; а слѣдовательно и испытывающія равныя и прямо-противуположныя горизонтальныя давленія, перпендикулярныя къ плоскости MN.

Ворая часть предложенія, состоящая въ томъ, что вертикальная составляющая давленія на поверхность погруженнаго въ жидкость тѣла равна и противуположна вѣсу вытѣсненной тѣломъ жидкости, извѣстная подъ названіемъ *закона Архимеда*, можетъ быть доказана слѣдующимъ весьма простымъ разсужденіемъ.

Если выдѣлимъ мысленно, гдѣ-либо внутри жидкости, находящейся въ равновѣсіи, объемъ ея произвольной наружной формы, то давленіе остальной жидкости на поверхность этого объема, какъ это необходимо для существованія равновѣсія, *должно быть равно и прямо-противуположно вѣсу жидкости, заключенной въ этомъ объемѣ*. Съ другой стороны, давленіе это не зависитъ отъ физическихъ свойствъ вещества, наполняющаго выдѣленный объемъ, а потому оно останется и по величинѣ и по направленію то же самое, если мысленно выдѣленный объемъ будетъ наполненъ не жидкостью, но веществомъ со всѣми свойствами твердаго тѣла; хотя можетъ быть, для удержанія этого тѣла въ равновѣсіи внутри жидкости, придется приложить къ нему нѣкоторое постороннее усиліе, въ которомъ не было надобности, пока разсматриваемый объемъ былъ наполненъ жидкостью.

15. Изъ всего сказаннаго въ предыдущемъ № видно, что *для равновѣсія плавающаго твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы, во-первыхъ, вѣсъ плавающаго тѣла равнялся вѣсу вытѣсненной имъ жидкости, а во-вторыхъ,—точка приложенія вѣса тѣла т.-е., его центръ тяжести и точка приложенія давленія жидкости на тѣло, т.-е. центръ тяжести объема погруженнаго въ жидкости, лежали на одной отвѣсной прямой линіи.*

Пусть P будетъ вѣсъ тѣла, W его объемъ, V объемъ вытѣсненной тѣломъ жидкости и μ плотность жидкости. Если равновѣсіе дѣйствительно имѣетъ мѣсто, то первое изъ предыдущихъ условій даетъ $P = g\mu V = \Delta V$, гдѣ V или равно W или же менѣе его.

Если $V = W$, то тѣло вполнѣ погружено въ жидкость, но если $V < W$, то оно погружено только частью, такъ что объемъ $W - V$ находится надъ свободною поверхностью жидкости, а остальной объемъ V находится подъ этою поверхностью.

Если $P > \Delta W$, то равновѣсія быть не можетъ и тѣло, для котораго имѣетъ мѣсто это условіе, будучи погружено въ жидкость, будетъ опускаться внизъ, пока не достигнетъ дна сосуда; если же $P < \Delta W$ то тѣло, будучи вполнѣ погружено въ жидкость, будетъ подниматься вверхъ, пока нѣкоторый объемъ тѣла не выйдетъ изъ жидкости наружу.

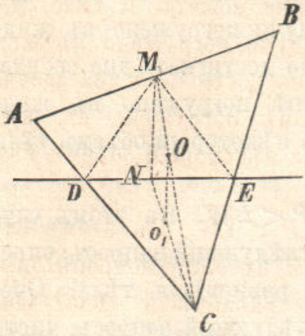
16. Остановимся на случаѣ, когда $P < \Delta W$. Въ этомъ случаѣ можно задать себѣ на разрѣшеніе слѣдующій вопросъ: опредѣлить всѣ положенія, возможныя для равновѣсія тѣла? Очевидно, что вопросъ этотъ сводится на слѣдующій вопросъ, чисто геометрическій: опредѣлить положеніе сѣкущей плоскости, удовлетворяющей слѣдующимъ двумъ условіямъ: во-1-хъ, чтобы отсѣкаемый отъ тѣла этою плоскостью объемъ V относился къ полному объему тѣла W, такъ какъ вѣсъ тѣла P (равный въ случаѣ равновѣсія ΔV) относится къ вѣсу ΔW жидкости такого же объема какъ и данное тѣло, и во-2-хъ, чтобы прямая, соединяющая центръ тяжести тѣла съ центромъ отсѣченнаго объема V, была бы перпендикулярна къ сѣкущей плоскости.

Плоскость, удовлетворяющая этимъ двумъ условіямъ, называется *плоскостью плаванія*. Сколько можно провести такихъ плоскостей плаванія, столько существуетъ различныхъ положеній равновѣсія для даннаго тѣла.

Если, не обращая вниманія на второе условіе, будемъ строить сѣкущія плоскости, удовлетворяющія только первому условію, то получимъ безчисленное множество плоскостей, обвертывающихъ собою нѣкоторую кривую поверхность. Центры же тяжести отсѣченныхъ объемовъ расположатся на нѣкоторой другой поверхности. Изученіе геометрическихъ свойствъ этихъ двухъ поверхностей можетъ привести къ отысканію общаго рѣшенія предложенной задачи. Мы не будемъ здѣсь останавливаться на опредѣленіи такого общаго рѣшенія, такъ какъ сама задача не имѣетъ особенной практической важности, но въ видѣ примѣра ограничимся рѣшеніемъ слѣдующаго частнаго случая.

Опредѣлимъ положенія равновѣсія прямой однородной трехгранной призмы, когда ребра ея остаются горизонтальными.

Фиг. 6.



Начнемъ со случая, когда у плавающей призмы только одно ребро погружено въ жидкость.

Пусть ABC будетъ поперечное сѣченіе призмы, проходящее чрезъ ея центръ тяжести O (фиг. 6), а DE пусть будетъ пересѣченіе этого сѣченія съ искомою плоскостью плаванія. Отсѣченная отъ призмы часть плоскостью плаванія будетъ трехгранная же призма съ основаніемъ DCE; поэтому, отношеніе объемовъ V и W будетъ равно отношенію площадей трехугольниковъ DCE и ACB. Назовемъ стороны BC и AC чрезъ a и b, а стороны EC и DC чрезъ x и y, тогда получимъ:

$$\frac{V}{W} = \frac{P}{\Delta W} = \gamma = \frac{\frac{1}{2} xy \sin c}{\frac{1}{2} ab \sin c} = \frac{xy}{ab},$$

или
$$xy = \gamma ab \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Центръ тяжести O данной призмы, какъ однородной, совпадаетъ съ центромъ ея объема, поэтому положеніе этой точки опредѣляется условіями, что $AM = MB$ и $CO = \frac{2}{3}\, CM$. Точно такъ же, положеніе центра тяжести O', отсѣченнаго объема V, опредѣляется условіями, что $DN = NE$ и $CO' = \frac{2}{3}\, CN$. Слѣдовательно, стороны трехугольниковъ CMN и COO' пропорціональны; поэтому, трехугольники эти подобны. Изъ подобія же этихъ трехугольниковъ слѣдуетъ, что прямыя MN и OO' параллельны, а такъ какъ прямая OO' перпендикулярна къ DE, то и MN тоже перпендикулярна къ DN. Слѣдовательно, наклонныя MD и ME, какъ одинаково удаленныя отъ основанія перпендикуляра, равны между собою. Чтобы выразить аналитически равенства этихъ послѣднихъ прямыхъ, пусть будетъ:

$$CM = h, \ \angle ACM = \beta \ \text{ и } \ \angle BCM = \alpha,$$

тогда $$\overline{DM}^2 = h^2 + y^2 - 2hy\cos\beta$$
$$\overline{EM}^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha$$

и $$x^2 - y^2 - 2h(x\cos\alpha - y\cos\beta) = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (b)$$

Положительные корни уравненій (a) и (b), удовлетворяющіе неравенствамъ $x < a$ и $y < b$ доставятъ рѣшенія даннаго вопроса.

Геометрическое рѣшеніе вопроса получается слѣдующимъ образомъ: примемъ прямыя CB и CA за координатныя оси и назовемъ координаты точки N, лежащей на срединѣ прямой DE, чрезъ ξ и η, тогда получимъ $\xi = \frac{1}{2}x$ и $\eta = \frac{1}{2}y$, а при этомъ уровненіе (a) доставитъ

$$\xi\eta = \tfrac{1}{4}\gamma ab \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (c)$$

Это послѣднее уравненіе принадлежитъ гиперболѣ, для которой прямыя CB и CA суть асимптотами. Гипербола эта проходитъ чрезъ точку N и касается прямой DE въ этой точкѣ, такъ какъ точка касанія должна дѣлить по поламъ часть касательной, лежащей между асимптотами. Слѣдов., для рѣшенія вопроса, нужно построить гиперболу, опредѣляемую уравненіемъ (c), изъ точки M провести къ ней нормаль и въ точкѣ пересѣченія нормали съ гиперболою построить касательную, которая и представитъ собою пересѣченіе средняго поперечнаго сѣченія призмы съ плоскостью плаванія, если только координаты ξ и η, найденной такимъ построеніемъ точки N, будутъ удовлетворять неравенствамъ $\xi < \frac{1}{2}a$ и $\eta < \frac{1}{2}b$. Сколько можно будетъ провести изъ точки M такихъ нормалей къ гиперболѣ, столько же будетъ различныхъ рѣшеній задачи.

Случай, когда два ребра призмы погружены въ жидкость, сводится на случай только-что разсмотренный. Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только обратить вниманіе во-первыхъ на то, что каково бы ни было направленіе сѣкущей прямой DE, всегда центры тяжести всего трехугольника ABC и его частей DEC и $ABED$ будутъ лежать на одной прямой, слѣдов., если прямая, соединяющая центръ тяжести O всего трехугольника ACB, съ центромъ тяжести трехугольника DEC будетъ перпендикулярна къ сѣкущей DE, то къ ней будетъ перпендикулярна и прямая, соединяющая точку O съ центромъ тяжести четырехугольника $ABED$; во-вторыхъ, отношенія площадей $\frac{ABED}{ABC}$ и $\frac{DEC}{ABC}$, которыя мы обозначимъ чрезъ γ' и γ, находятся въ слѣдующей простой зависимости: $\gamma + \gamma' = 1$. Поэтому, если отношеніе γ, при различныхъ положеніяхъ сѣкущей DE будетъ оставаться постояннымъ, то и отношеніе γ' такъ же не будетъ мѣняться. Итакъ случай когда два ребра призмы погружены въ жидкость, разрѣшается тѣми же уравненіями (a) и (b), если только въ нихъ отношеніе γ замѣнимъ на $1 - \gamma$.

Условія устойчивости равновѣсія плавающаго тѣла.

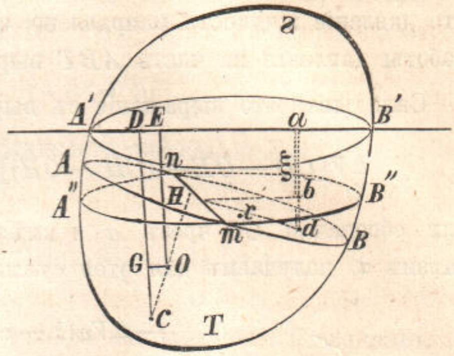
17. Начало, на основаніи котораго мы выведемъ условія устойчивости равновѣсія плавающаго тѣла, состоитъ въ слѣдующемъ: если частицамъ тѣла, находящагося въ положеніи устойчиваго равновѣсія, будутъ сообщены какія-либо безконечно малыя скорости (не нарушающія, впрочемъ, связи, существующей между этими частицами), то тѣло отклонится безконечно мало отъ этого положенія равновѣсія и по совершеніи нѣсколькихъ безконечно малыхъ колебаній около этого положенія, остановится въ немъ въ покоѣ; если же равновѣсіе тѣла неустойчивое, то по сообщеніи ему безконечно малыхъ скоростей, тѣло будетъ уклоняться отъ этого положенія все болѣе и болѣе, пока не придетъ въ новое положеніе устойчиваго равновѣсія, въ которомъ и остановится.

Такимъ образомъ въ первомъ случаѣ перемѣщенія тѣла, происходящія отъ сообщенія его частицамъ безконечно малыхъ скоростей, остаются безконечно малыми во все время движенія; во второмъ же случаѣ эти перемѣщенія обращаются, по прошествіи нѣкотораго времени, въ конечныя величины.

Пусть $ASBT$ будетъ плавающее тѣло (фиг. 7); AB—плоскость плаванія въ моментъ устойчиваго равновѣсія тѣла, C—центръ тяжести тѣла и O—центръ тяжести объема ABT. Точки C и O находятся на прямой CH, перпендикулярной къ плоскости плаванія AB. Если обозначимъ объемъ ABT чрезъ V, то вѣсъ тѣла будетъ равенъ ΔV.

Отъ сообщенія частицамъ тѣла безконечно малыхъ скоростей, оно перемѣщалось и, по прошествіе времени t, заняло положеніе, обозначенное на чертежѣ. Въ этомъ положеніи тѣла $A'B'$ есть сѣченіе тѣла свободною поверхностью жидкости. Если чрезъ центръ тяжести сѣченія AB проведемъ сѣченіе $A''B''$, параллельное свободной поверхности, то можемъ сказать, что во время движенія плоскость плаванія AB, а съ нею вмѣстѣ и все тѣло, сначала имѣли поступательное перемѣщеніе по вертикальному направленію, пока плоскость плаванія не пришла въ положеніе $A''B''$, а послѣ вращательное перемѣщеніе около прямой mn, пока плоскость $A''B''$ не совмѣстилась съ положеніемъ плоскости AB, указанномъ на чертежѣ. Пусть ξ будетъ величина поступательнаго перемѣщенія, т.-е. разстояніе параллельныхъ плоскостей $A'B'$ и $A''B''$, а α—величина вращательнаго перемѣщенія, т.-е. мѣра угла, образуемаго плоскостями AB и $A''B''$. Такъ какъ по условію, существовавшее равновѣсіе было устойчивымъ, то положеніе тѣла въ моментъ t должно отличаться отъ начальнаго равновѣснаго положенія безконечно мало, слѣдов., ξ и α должно считать безконечно малыми.

Фиг. 7.



Пусть v_0, v_0', v_0'' . . . будутъ начальныя безконечно — малыя скорости частицъ тѣла, а v, v', v'' . . . скорости ихъ въ моментъ времени t; тогда для приращенія живой силы тѣла, въ промежутокъ времени t, получимъ выраженіе $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$. Это приращеніе должно равняться алгебраической суммѣ работъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло относительно перемѣщеній ξ и α.

Начнемъ съ опредѣленія работы вѣса тѣла. Въ моментъ t центръ тяжести C тѣла находится на глубинѣ CD подъ свободною поверхностью жидкости, между тѣмъ какъ при началѣ движенія онъ находился на глубинѣ CH, слѣдов., работа вѣса тѣла равна

$$\Delta V(CD - CH) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Для опредѣленія работы давленія жидкости на тѣло разобьемъ эту работу на двѣ части, а именно: на работу давленія, дѣйствовавшаго на часть ATB тѣла и на работу давленія, дѣйствовавшаго на часть $A'B'BA$. Величина давленія на часть ABT равна ΔV, точка же приложенія этого давленія прошла, во время движенія тѣла, путь, считаемый по направленію давленія, равный разности $OE - OH$; слѣдов., принимая во вниманіе, что давленіе жидкости направлено снизу вверхъ, получимъ для работы давленія на часть ABT выраженіе $\Delta V(OH - OE)$.

Складывая это выраженіе съ выраженіемъ (a) получаемъ:

$$\Delta V[CD - OE - (CH - OH)] = -\Delta V(CO - CG),$$

или обозначая CO чрезъ a и имѣя въ виду, что уголъ GCO равенъ α, получаемъ для этой суммы

$$-\Delta Va(1 - \cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{b})$$

Для опредѣленія работы давленія на часть $A'B'BA$ замѣтимъ предварительно, что сѣченія AB и $A'B'$, по условію, отличаются безконечно мало по своему положенію другъ отъ друга, поэтому, если форма тѣла такова, что у него нѣтъ быстрыхъ измѣненій при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому, съ нимъ смѣжному, мы имѣемъ право часть $A'B'BA$ разсматривать какъ призму. Разобьемъ площадь сѣченія AB на безконечно малые элементы, а весь объемъ $A'B'BA$ на безконечно-тонкія вертикальныя призмы, опирающіяся на эти элементы. Пусть $ad = h$ будетъ высота одной изъ такихъ элементарныхъ призмъ, dF — площадь элемента сѣченія AB, на который опирается эта призма и x — разстояніе этого элемента dF отъ прямой mn пересѣченія плоскостей AB и $A''B''$. При началѣ движенія, элементарная призма находилась надъ свободною поверхностью жидкости, а во время перемѣщенія тѣла постепенно погружалась въ жидкость. Въ то мгновеніе, когда призма эта была погружена на глубину z подъ свободною поверхностью, вѣсъ вытѣсненной ею жидкости (т.-е. давленіе на нее жидкости) равнялось $-\Delta dF.\cos\alpha.z$ (здѣсь z есть высота погруженной части призмы въ жидкости, а $dF.\cos\alpha$ есть поперечное сѣченіе призмы). Слѣдов. работа давленія относительно перемѣщенія dz равна $-\Delta dF \,.\, \cos\alpha \,.\, z dz$, а относительно полнаго перемѣщенія h есть

$$-\Delta\partial F \,.\, \cos\alpha \,.\int_0^h z dz = -\Delta\frac{h^2}{2} \,.\, \cos\alpha \,.\, \partial F.$$

Но $h = ab + bd = \xi + x\sin\alpha$, поэтому искомая работа давленія на элементарную призму есть

$$-\tfrac{1}{2}\Delta\cos\alpha(\xi + x\sin\alpha)^2\,\partial F.$$

Наконецъ, работа давленія жидкости на весь объемъ $A'B'BA$ тѣла представится интеграломъ

$$-\tfrac{1}{2}\Delta\cos\alpha\int(\xi^2 + 2\xi\sin\alpha \,.\, x + \sin^2\alpha \,.\, x^2)\partial F$$

распространеннымъ на всю площадь сѣченія AB. Совершивъ указанное интегрированіе, окончательно получимъ для искомой работы выраженіе

$$-\tfrac{1}{2}\Delta\cos\alpha(F\xi^2 + I\sin^2\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

гдѣ F есть площадь сѣченія AB, а $I = \int x^2 dF$ есть моментъ инерціи этого сѣченія относительно прямой mn. Интегралъ же $\int x dF = 0$, такъ какъ, по условію, прямая mn проходитъ чрезъ центръ тяжести площади F, а x есть разстояніе отъ прямой mn одного изъ элементовъ этой площади.

И такъ начало живыхъ силъ даетъ намъ слѣдующее уравненіе:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0{}^2 = -\Delta a(1-\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}\Delta\cos\alpha(F\xi^2 + I\sin^2\alpha).$$

Но α и ξ суть величины безконечно малыя, поэтому можно принять $\cos = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ и $\sin\alpha = \alpha$ и отбросить всѣ члены, порядокъ малости которыхъ будетъ выше второго, что сдѣлавъ, представимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующемъ простѣйшемъ видѣ:

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0{}^2 - \Delta\left[F \,.\, \xi^2 + (I + aV)\alpha^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Такъ какъ первая часть этого уравненія есть величина положительная, то и вторая честь должна быть положительною величиною, а поэтому необходимо должно имѣть мѣсто неравенство

$$\Sigma m v_0^2 > \Delta[F\,.\,\xi^2 + (I + aV)\alpha^2]$$

Но $\Sigma m v_0^2$ есть величина безконечно малая, а потому и

$$\Delta(F\,.\,\xi^2 + (I + aV)\alpha^2)$$

должно быть безконечно малою величиною. Посмотримъ же, какимъ образомъ это послѣднее условіе можетъ быть удовлетворено въ различныхъ частныхъ случаяхъ.

Въ случаѣ, когда центръ тяжести тѣла C, въ моментъ равновѣсія тѣла, лежитъ ниже центра O объема погруженнаго въ жидкость, т.-е. когда величина a положительная, члены $F\,.\,\xi^2$ и $(I + aV)\alpha^2$ будутъ оба положительными, а слѣдоват. сумма ихъ тогда только будетъ безконечномалою величиною, когда каждый членъ, отдѣльно взятый, будетъ безконечно малъ; а это послѣднее условіе прямо приводитъ къ тому, что ξ и α безконечно малы. И такъ если центръ тяжести тѣла лежитъ ниже центра тяжести погруженнаго объема, то равновѣсіе будетъ устойчивымъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ уравненіе (d) можетъ удовлетворяться только безконечно-малыми значеніями для перемѣщеній ξ и α.

Если центръ тяжести тѣла лежитъ выше центра тяжести погруженнаго объема, т.-е. если $a < 0$, и если въ то же время $I - aV > 0$, то опять равновѣсіе устойчивое, потому что какъ и прежде ξ и α должно считать безконечномалыми; но если $a < 0$ и разность $I - aV$ тоже будетъ менѣе нуля, тогда предыдущая сумма, долженствующая оставаться безконечномалою величиною, принимаетъ видъ

$$\Delta[F\,.\,\xi^2 - (aV - I)\alpha^2]$$

то-есть обращается въ разность двухъ положительныхъ количествъ, которая можетъ оставаться безконечномалою и при конечныхъ значеніяхъ перемѣщеній ξ и α. Слѣдов., если центръ тяжести тѣла лежитъ выше центра погруженнаго объема и въ то же время $aV > I$, то устройчивость равновѣсія не обезпечена, такъ какъ уравненіе (d) можетъ въ этомъ случаѣ удовлетворяться и при конечныхъ значеніяхъ перемѣщеній ξ и α.

И такъ для устойчивости равновѣсія необходимо, чтобы или a было болѣе нуля, или же, если a менѣе нуля, чтобы имѣло мѣсто неравенство $a < \frac{I}{V}$.

Понятно, что послѣднее неравенство должно имѣть мѣсто для всякаго положенія прямой mn, проходящей чрезъ центръ тяжести площади AB и лежащей въ этой плоскости, слѣдовательно, оно должно удовлетворяться и тогда, когда I будетъ имѣть наименьшее значеніе, т.-е. когда прямая mn совпадетъ съ большею осью центральнаго эллипсиса сѣченія AB. Такимъ образомъ послѣднее неравенство слѣдуетъ писать въ видѣ:

$$a < \frac{I_{min}}{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; : \; . \quad (24)$$

Чѣмъ болѣе будетъ $\frac{I_{min}}{V}$ въ сравненіи съ a, тѣмъ болѣе будетъ устойчивость тѣла, поэтому численную величину неправильной дроби $\frac{I_{min}}{aV}$ можно принять за мѣру устойчивости плавающаго тѣла.

18. Оканчивая изложеніе Гидростатики, считаемъ необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя указанія на то, въ какихъ случаяхъ выведенныя выше основныя формулы этой науки не могутъ быть примѣняемы къ дѣйствительно существующимъ жидкостямъ, которыя, какъ было замѣчено въ самомъ началѣ, не вполнѣ подходятъ подъ опредѣленіе совершенной жидкости.

Если въ жидкость, которая смачиваетъ дерево, напр. въ воду, погрузивъ деревянную палочку, вынемъ ее изъ жидкости, то на оконечности палочки появится капля, нижайшія частицы которой удерживаются верхними, несмотря на существующее притяженіе первыхъ къ землѣ. Такимъ образомъ въ явленіи этомъ ясно обнаруживается способность воды представлять нѣкоторое сопротивленіе внѣшнимъ растягивающимъ усиліямъ. Можно даже получить мѣру этого незначительнаго сопротивленія, сдѣлавъ каплѣ сѣченіе горизонтальною плоскостью и раздѣляя вѣсъ части капли, находящейся подъ этою плоскостью, на площадь сѣченія. Въ существованіи сопротивленій сдвигающимъ усиліямъ убѣдимся, сдѣлавъ каплѣ сѣченіе наклонною къ горизонту плоскостью.

Понятно, что сопротивленія растягивающимъ и сдвигающимъ усиліямъ у дѣйствительныхъ жидкостей проявляются отъ существованія между частицами ихъ особыхъ притягательныхъ силъ, заставляющихъ частицы какъ бы прилипать одна къ другой. Сила этого прилипанія, или сцѣпленія, невелика, а потому и не была принимаема нами во вниманіе при выводѣ основныхъ формулъ Гидростатики; однако могутъ, быть случаи когда этими силами пренебрегать будетъ невозможно. Дѣйствительно, мы видѣли, что дѣйствіе на данную частицу жидкости частицъ ее окружающихъ приводится къ отталкивающей силѣ, названной нами гидростатическимъ давленіемъ, и что давленіе это въ случаѣ тяжелой жидкости пропорціонально глубинѣ погруженія частицы подъ свободною поверхностью. Поэтому для частицъ, лежащихъ на чувствительной глубинѣ подъ свободною поверхностью, это отталкивающее давленіе будетъ значительнымъ въ сравненіи съ притягательною силою, происходящею отъ прилипанія, а потому сія послѣдняя сила и можетъ быть непринимаема во вниманіе; но для частицъ, лежащихъ внутри чрезвычайно тонкаго поверхностнаго слоя (близъ самой свободной поверхности), глубина погруженія, а вмѣстѣ съ нею и отталкивающая сила, дѣлаются ничтожно малыми величинами, а слѣдовательно притягательныя силы необходимо будутъ обнаруживать дѣйствіе. Такимъ образомъ чрезвычайно тонкій поверхностный слой каждой жидкости можно сравнить съ натянутою барабанною перепонкою. Въ этомъ-то слоѣ и могутъ обнаруживаться явленія, для объясненія которыхъ нельзя будетъ пользоваться основными формулами Гидростатики, выведенными въ предположеніи отсутствія притягательныхъ силъ между частицами жидкости.

Если на поверхностномъ слоѣ чистой воды, имѣющей температуру въ 20° С., проведемъ мысленно прямую линію, то поверхностное притягательное натяженіе, дѣйствующее на одномъ метрѣ длины этой прямой, какъ показали опыты, будетъ равно 7,3 граммовъ *). Это натяженіе различно для различныхъ жидкостей и всегда уменьшается съ увеличеніемъ температуры. Поверхностное натяженіе измѣняется отъ растворенія въ жидкости различныхъ веществъ. Такъ, напр., раствореніе мыла въ водѣ увеличиваетъ натяженіе ея поверхностнаго слоя, а раствореніе камфоры—уменьшаетъ.

Существованіемъ этого поверхностнаго притягательнаго натяженія объясняются многія явленія, какъ, напримѣръ, возможность образованія пузырей и вообще тончайшихъ пластинокъ изъ жидкаго тѣла; возможность плаванія на поверхности жидкости очень легкихъ тѣлъ, относительная плотность которыхъ, однако, болѣе плотности жидкости (напр. стальная иголка можетъ плавать на поверхности воды, если только она не будетъ смачиваться водою, т.-е. если поверхностный слой не покроетъ иголки). Отъ дѣйствія поверхностныхъ натяженій могутъ получиться различныя движенія легкихъ тѣлъ, плавающихъ на поверхности жидкости. Такъ, напр., частица камфоры, положенная на поверхность воды, можетъ получить быстрое поступательное и вращательное движенія отъ неодинаковой растворимости ея въ мѣстахъ соприкосновенія съ водою и происходящей отъ этого разницы въ величинахъ поверхностнаго натяженія слоя, окружающаго эту частицу.

Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ поверхностный слой соприкасается вещества стѣнокъ сосуда, въ которомъ заключена жидкость, входятъ въ дѣйствіе особыя силы притяженія или отталкиванія частицъ жидкости частицами твердаго вещества стѣнки. Эти послѣднія силы измѣняютъ форму поверхностнаго слоя, превращая его, въ мѣстахъ смежныхъ со стѣнкою, изъ плоскости въ кривую поверхность, вогнутую или выпуклую.

Изученіе всѣхъ упомянутыхъ явленій, зависящихъ отъ дѣйствія такъ-называемыхъ *частичныхъ силъ*, принадлежитъ молекулярной Механикѣ и составляетъ особую отрасль нашихъ знаній.

---

*) Annales de Chimie et de Phisique. T. XX. 1870. Sur la tension superficielle des liquides etc. par G. van der Mensbrugghe.

ГИДРОДИНАМИКА.

Общія уравненія движенія жидкости.

19. Приступая къ выводу общихъ уравненій движенія жидкаго тѣла, необходимо замѣтить, что скорость движенія, давленіе, плотность и внѣшнія силы, дѣйствующія на частицы жидкости, въ общемъ случаѣ могутъ, для одной и той же частицы жидкости, мѣняться съ теченіемъ времени и при томъ, для даннаго мгновенія, могутъ быть различными для различныхъ частицъ. Такимъ образомъ скорость, давленіе, плотность и проч. должно разсматривать какъ функціи времени t и координатъ x, y и z. Перемѣнныя x, y, z и t могутъ быть разсматриваемы, смотря по смыслу рѣшаемаго вопроса, или какъ независимыя между собою перемѣнныя, или же первыя три изъ нихъ—какъ функціи четвертой.

Дѣйствительно, положимъ напр., что скорость V представляется въ видѣ слѣдующей функціи перемѣнныхъ x, y, z и t:

$$V=f(x, y, z, t).$$

Если въ функціи этой, сохраняя одно и то же значеніе для перемѣнной t, будемъ приписывать различныя значенія перемѣннымъ x, y и z, то для избраннаго момента времени опредѣлимъ скорости различныхъ частицъ, занимающихъ въ этотъ моментъ пложенія въ пространствѣ, опредѣляемыя избираемыми значеніями для координатъ x, y, z. Напротивъ того, если, сохраняя одно и то же значеніе для каждой изъ координатъ x, y и z, будемъ мѣнять значенія перемѣнной t, то опредѣлимъ скорости различныхъ частицъ жидкости, проходящихъ, въ различные моменты врдмени, чрезъ избранную точку пространства, опредѣляемую координатами x, y и z. Наконецъ, если будемъ мѣнять и время t, и координаты x, y, z, разсматривая сіи послѣднія какъ функціи времени, то опредѣлимъ скорость для одной и той же частицы жидкости въ различные моменты времени, при различныхъ положеніяхъ ея на своей траэкторіи, если только, само собою разумѣеться, избранныя функціи отъ времени для координатъ будутъ удовлетворять уравненію этой траэкторіи.

И такъ полная производная скорости V по времени (которую мы будемъ обозначить чрезъ $\left(\frac{dV}{dt}\right)$, для отличія отъ частной производной, обозначаемой чрезъ $\frac{\partial V}{\partial t}$), будетъ слѣдующаго вида:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Если координаты x, y и z, соотвѣтствующія времени t, и координаты $x+\partial x$, $y+\partial y$ и $z+\partial z$, соотвѣтствующія времени $t+\partial t$, будутъ принадлежать одной и той же частицѣ жидкости, то ∂x, ∂y и ∂z будутъ проекціями на координатныя оси дуги ∂s траэкторіи этой частицы, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, отношенія $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$ будутъ ни что иное, какъ проекціи на оси скорости частицы, обозначая эти проекціи послѣдовательно чрезъ u, v и w, то-есть, принимая

$$u=V\cos(V,x),\quad v=V\cos(V,y)\quad\text{и}\quad w=V\cos(V,z)$$

будемъ имѣть также:

$$u=\frac{\partial x}{\partial t},\quad v=\frac{\partial y}{\partial t}\quad\text{и}\quad w=\frac{\partial z}{\partial t}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (1)$$

Слѣдов., *полная производная скорости V по времени, когда разсматривается движеніе частицы по своей траэкторіи, будетъ*

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}u+\frac{\partial V}{\partial y}v+\frac{\partial V}{\partial z}w.$$

Въ этомъ же случаѣ, подобнымъ образомъ, и для полной производной давленія p по времени, получимъ

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial y}v+\frac{\partial p}{\partial z}w.$$

20. Теперь не трудно получить уравненія движенія. Опредѣляя въ № 4 условія равновѣсія безконечно малаго параллелопипеда, выдѣленнаго внутри жидкости, мы видѣли, что проекціи на оси равнодѣйствующей силъ, къ нему приложенныхъ, суть слѣдующія:

на ось x: $\quad \partial x\partial y\partial z\left(\mu X-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$

» » y: $\quad \partial x\partial y\partial z\left(\mu Y-\frac{\partial p}{\partial y}\right)$

» » z: $\quad \partial x\partial y\partial z\left(\mu Z-\frac{\delta p}{\partial z}\right)$.

Раздѣляя эти выраженія на массу $\mu\partial x\partial y\partial z$ параллелопипеда, получаемъ для проекцій равнодѣйствующаго ускоренія выраженія:

$$X-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},\quad Y-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\quad \text{и}\quad Z-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Каждая изъ этихъ проекцій, въ случаѣ равновѣсія, равняется нулю, но въ случаѣ движенія, по началу Д'Аламберта, должна равняться полной производной по времени соотвѣтствующей проекціи скорости; поэтому имѣемъ уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}&=\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w\\
Y-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}&=\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w\\
Z-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}&=\left(\frac{dw}{dt}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w
\end{aligned}\right\}\quad\dots\dots\quad(2)$$

Уравненія эти были выведены Эйлеромъ. Они называются *общими уравненіями движенія* и имѣютъ мѣсто для какой угодно частицы жидкости, когда слѣдимъ за ея движеніемъ по своей траэкторіи. Необходимо при томъ имѣть въ виду, что уравненія эти не содержатъ членовъ зависящихъ отъ тренія, могущаго проявляться между частицами во время ихъ движенія.

21. Выведенныхъ въ предъидущемъ № уравненій (2) недостаточно для рѣшенія вопроса о движеніи жидкости, такъ какъ уравненія эти содержатъ пять неизвѣстныхъ или искомыхъ функцій: u, v, w, p и μ; между тѣмъ какъ уравненій для ихъ опредѣленія имѣется только три. Еще два недостающихъ уравненія могутъ быть выведены не иначе, какъ допуская нѣкоторыя предположенія относительно обстоятельствъ изучаемаго движенія. Обыкновенно ограничиваются случаемъ, когда во время движенія жидкости необразуется внутри ея массы пустотъ, т.-е. не происходитъ такъ называемаго разрыва жидкости. Чтобы выразить аналитически условіе, что во время движенія масса жидкости неразрывается, вообразимъ въ пространствѣ, занятомъ движущеюся жидкостью, безконечно малый параллелопипедъ съ ребрами параллельными координатнымъ осямъ x, y и z и, предполагая этотъ параллелопипедъ неподвижнымъ, опредѣлимъ массу жидкости, входящей, въ промежутокъ времени dt, во внутрь этого параллелопипеда, и выходящей изъ него въ этотъ же промежутокъ времени.

Черезъ грань $dydz$, ближайшую къ плоскости (yz), вливается во внутрь параллелопипеда объемъ жидкости, равный объему безконечно тонкой наклонной призмы, основаніе которой равно $dydz$, а длина равна длинѣ Vdt пути, проходимаго частицами. Слѣдов., высота этой призмы равна проекціи длины Vdt на нормаль къ площадкѣ $dydz$, т.-е. на ось x, а потому искомый объемъ равенъ $dydz\, Vdt \,.\cos(V, x) = udydzdt$. Масса же этого объема равна $\mu udydzdt$. Такъ какъ скорости частицъ, говоря вообще, мѣняются непрерывно (быстрыя измѣненія скорости по величинѣ или по направленію могутъ имѣть мѣсто только въ исключительныхъ случаяхъ, требующихъ особаго изученія), то масса жидкости, выходящей изъ параллелопипеда чрезъ грань $dydz$, дальнѣйшую отъ плоскости (yz), въ теченіи dt единицъ времени, можетъ отличаться отъ массы входящей въ это время чрезъ грань ей параллельную, только безконечно малою величиною, а именно для этой массы будемъ имѣть выраженіе

$$\mu u dy dz dt + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

Подобнымъ образомъ, для массъ, входящихъ чрезъ площадки $dz dx$ и $dx dy$, найдемъ выраженія

$$\mu v dz dx dt \text{ и } \mu w dx dy dt,$$

а для выходящихъ чрезъ грани, параллельныя этимъ площадкамъ,

$$\mu v dz dx dt + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} dy dz dx dt \quad \text{и} \quad \mu w dx dy dt + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} dz \,.\, dx dy dt.$$

Слѣдовательно, для приращенія массы внутри параллелопипеда, получаемъ выраженіе:

$$-\left(\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z}\right) dx dy dz \,.\, dt \quad . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Но масса жидкости, наполняющей параллелопипедъ (безъ пустотъ), въ моментъ времени t была равна $\mu dx dy dz$, а въ слѣдующій затѣмъ моментъ времени $t + dt$, эта масса должна равняться

$$\mu dx dy dz + \frac{\partial \mu}{\partial t} dt \,.\, dx dy dz,$$

если только въ теченіи времени dt внутри параллелопипеда не произошло разрыва жидкости. Слѣдовательно, приращеніе массы въ элементъ времени dt выражается также количествомъ

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt \,.\, dx dy dz, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

въ которомъ $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ есть частная производная плотности μ по времени, такъ какъ положеніе параллелопипеда въ пространствѣ, а слѣдовательно и координаты x, y и z, не мѣнялись.

Приравнивая между собою выраженія *(a)* и *(b)* и сокращая полученное такимъ образомъ уравненіе на $dx\,dy\,dz\,dt$ окончательно, найдемъ слѣдующее аналитическое выраженіе условія неразрывности жидкости:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial(\mu u)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu v)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu w)}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если разсматриваемая жидкость будетъ газообразною, тогда законъ Маріота и Гайлюссака доставитъ намъ еще одно уравненіе

$$\mu=kp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которомъ k есть коэффиціентъ зависящій только отъ температуры, поэтому въ этомъ случаѣ уравненій (2), (3) и (4) вполнѣ достаточно для рѣшенія вопроса, если только температуру жидкости будемъ разсматривать какъ величину постоянную. Если жидкость будетъ капельною, то уравненіе (4) не существуетъ, но въ этомъ случаѣ уравненіе (3) разбивается на два и вопросъ объ опредѣленіи пяти неизвѣстныхъ функцій u, v, w, μ и p, остается вопросомъ опредѣленнымъ. Дѣйствительно, если жидкость будетъ капельною и неоднородною, напримѣръ, будетъ смѣсью нѣсколькихъ различныхъ капельныхъ жидкостей, то μ, будучи различнымъ для различныхъ частицъ, будетъ постояннымъ для одной и той же частицы, во все время движенія ея по своей траэкторіи, поэтому полная производная μ по t должна равняться нулю. Вводя это условіе въ уравненіе (3), оно разложится на два слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\mu}{\partial x}u+\frac{\partial\mu}{\partial y}v+\frac{\partial\mu}{\partial z}w=0\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Наконецъ, если жидкость будетъ капельною и однородною, тогда μ будетъ величиною независящею ни отъ времени, ни отъ координатъ, поэтому въ этомъ случаѣ уравненіе (3) доставитъ:

$$\left.\begin{aligned}\mu=\text{const.}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Понятно, что въ этомъ случаѣ численное значеніе μ т.-е. родъ жидкости долженъ быть извѣстенъ.

22. Интегрированіемъ уравненій (2), въ совокупности съ уравненіемъ неразрывности жидкости, опредѣлимъ всѣ неизвѣстныя функціи, но, при такомъ опредѣленіи ихъ, вь окончательныя формулы войдутъ произвольныя функціи, или постоянныя произвольныя величины, которыя должно опредѣлять по условіямъ, имѣющимъ мѣсто для точекъ, лежащихъ на поверхностяхъ, ограничивающихъ жидкость. Относительно частицъ жидкости лежащихъ на ея предѣлахъ обыкновенно предполагаютъ, что частицы лежащія на стѣнкѣ въ данное мгновеніе остаются на ней и во все время движенія, точно также и частицы принадлежащія въ данное мгновеніе поверхности свободной, остаются на этой поверхности и во все время движенія.

Пусть $F(x, y, z, t) = 0$ есть уравненіе поверхности стѣнки, или свободной поверхности, способной измѣнять свою форму съ теченіемъ времени. Нѣкоторая частица жидкости, опредѣляемая координатами x, y, z и лежащая на этой поверхности въ моментъ времени t, будетъ принадлежать ей и въ моментъ времени $t + dt$; слѣдов. новыя ее кординаты $x + udt$, $y + vdt$ и $z + wdt$, соотвѣтствующія моменту $t + dt$ должны такъ же удовлетворить уравненію поверхности, если только въ этомъ уравненіи на мѣсто t напишемъ $t + dt$. И такъ имѣемъ:

$$F(x + udt,\ y + vdt,\ z + wdt,\ t + \partial t) = 0.$$

Вычитая изъ этого уравненія уравненіе поверхности получаемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w = \left(\frac{dF}{dt}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Если въ уравненіи $F = O$ время t явнымъ образомъ входить не будетъ, то есть, поверхность не будетъ измѣнять, съ теченіемъ времени, ни своей формы, ни своего положенія въ пространствѣ, то частная производная $\frac{\partial F}{\partial t}$ будетъ равна нулю и предъидущее условное уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Это послѣднее уравненіе показываетъ, что скорость частицы, лежащей на неизмѣняющейся поверхности, направлена по перпендикуляру къ нормали поверхности.

Для частицъ лежащихъ на свободной поверхности, сверхъ только-что выведеннаго условія, должно имѣть мѣсто еще и другое, а именно давленіе p въ каждой изъ нихъ, во все время движенія, должно быть равно и прямо противуположно тому внѣшнему давленію P, которое дѣйствуетъ на единицу свободной поверхности, слѣдоват.:

$$p = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

23. Общія уравненія движенія Эйлера (уравн. (2) № 20) опредѣляютъ намъ искомыя функціи u, v, w, p, и μ въ зависимости отъ четырехъ поремѣнныхъ x, y, z и t, причемъ перемѣнныя x, y и z должно разсматривать какъ функціи перемѣнной t. При рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, можетъ оказаться болѣе удобнымъ выражать искомыя функціи въ зависимости отъ четырехъ перемѣнныхъ совершенно другъ отъ друга независимыхъ. За такія перемѣнныя можно принять время t и координаты a, b и c разсматриваемой частицы жидкости, сооотвѣтствующія нѣкоторому вполнѣ опредѣленному мгновенію времени t_0 (это мгновеніе, если угодно, можно разсматривать какъ соотвѣтствующее началу движенія жидкаго тѣла). Понятно, что координаты x, y, z частицы, во время t, суть функціи какъ этой перемѣнной t, такъ и координатъ a, b и c, какія имѣла частица въ моментъ времени t_0. Такимъ образомъ можемъ принять:

$$x = f_1(a. \ b, \ c, \ t); \quad y = f_2(a, \ b, \ c, \ t); \quad z = f_3(a, \ b, \ c, \ t) \quad . \quad . \quad (10)$$

Если бы функціи f_1, f_2 и f_3 были намъ извѣстны, то исключая изъ послѣднихъ трехъ уравненій время t, получили бы уравненія траэкторіи частицы жидкости, опредѣляемой координатами a, b и c въ моментъ времени t_0. Мѣняя же въ уравненіяхъ траэкторіи постоянные параметры a, b и c опредѣлили бы траэкторію любой частицы жидкости.

Разсматривая x, y и z какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ a, b, c и t нужно и количества u, v, w, p и μ разсматривать какъ функціи этихъ же четырехъ перемѣнныхъ, а при этомъ уравненія движенія Эйлера должны превратиться въ новыя уравненія, въ которыхъ вмѣсто производныхъ взятыхъ по x, y и z, должны входить производныя, взятыя по a, b и c. Эти новыя уравненія получаются изъ уравненій (2) безъ затрудненія, слѣдующимъ образомъ: умножаемъ эти уравненія послѣдовательно: первое на $\frac{dx}{da}$, второе на $\frac{dy}{da}$, третье на $\frac{dz}{da}$ и складываетъ вмѣстѣ, послѣ первое на $\frac{dx}{db}$, второе на $\frac{dy}{db}$ и третье на $\frac{dz}{db}$, и опять складываемъ и наконецъ—первое на $\frac{dx}{dc}$, второе на $\frac{dy}{dc}$ и третье на $\frac{dz}{dc}$ и снова складываемъ вмѣстѣ; тогда получимъ слѣдующихъ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\left(\frac{du}{dt}\right)-X\right)\frac{dx}{da}+\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)-Y\right)\frac{dy}{da}+\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)-Z\right)\frac{dz}{da}+\frac{1}{\mu}\frac{dp}{da}=0\\
\left(\left(\frac{du}{dt}\right)-X\right)\frac{dx}{db}+\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)-Y\right)\frac{dy}{db}+\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)-Z\right)\frac{dz}{db}+\frac{1}{\mu}\frac{dp}{db}=0\\
\left(\left(\frac{du}{dt}\right)-X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)-Y\right)\frac{dy}{dc}+\left(\left(\frac{dw}{dt}\right)-Z\right)\frac{dz}{dc}+\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dc}=0
\end{aligned}\right\}(11)$$

Эти послѣднія уравненія движенія принадлежатъ Лягранжу. Въ нихъ u, v, w, p, μ, x, y, z и внѣшнія силы должно разсматривать какъ функціи четырехъ перемѣнныхъ независимыхъ a, b, c и t.

Чтобы можно было эти уравненія примѣнять къ рѣшенію вопросовъ о движеніи жидкостей, необходимо и уравненіе неразрывности жидкости видоизмѣнить соотвѣтствующимъ образомъ.

Для этого, въ моментъ времени t_0, построимъ въ точкѣ M, опредѣляемой координатами a, b и c, безконечно малый прямоугольный параллелопипедъ съ ребрами MA, MB и MC, послѣдовательно равными ∂a, ∂b и ∂c, и плотность жидкости, заключенной въ этомъ параллелопипедѣ, назовемъ чрезъ μ_0. Предполагая, что жидкость наполняетъ параллелопипедъ безъ пустотъ внутри, получаемъ для массы этой жидкости выраженіе $\mu_0\,\partial a\partial b\partial c$. Въ моментъ времени t, параллелопипедъ этотъ будетъ занимать другое мѣсто въ пространствѣ и будетъ, говоря вообще, косоугольнымъ параллелопипедомъ, такъ какъ элементы жидкости, во время своего движенія могутъ испытывать деформацію. Постараемся опредѣлить объемъ этого послѣдняго параллелопипеда.

Въ моментъ t_0 координаты вершинъ M, A, B и C были слѣдующія:

$$\begin{array}{lll} \text{для } M & : & a,\ b,\ c; \\ \text{»}\ \ A & : & a + \partial a,\ b\ c; \\ \text{»}\ \ B & : & a,\ b + \partial b,\ c \\ \text{и »}\ \ C & : & a,\ b,\ c + \partial c. \end{array}$$

Въ моментъ же времени t, координаты ихъ будутъ:

$$\begin{array}{lll} \text{для } M & : & x,\ y,\ z; \\ \text{»}\ \ A & : & x + \frac{\partial x}{\partial a}\partial a,\ y + \frac{\partial y}{\partial a}\partial a,\ z + \frac{\partial z}{\partial a}\partial a; \\ \text{»}\ \ B & : & x + \frac{\partial x}{\partial b}\partial b,\ y + \frac{\partial y}{\partial b}\partial b,\ z + \frac{\partial z}{\partial a}\partial b \\ \text{и »}\ \ C & : & x + \frac{\partial x}{\partial c}\partial c,\ y + \frac{\partial y}{\partial c}\partial c \text{ и } z + \frac{\partial z}{\partial c}\partial c. \end{array}$$

Поэтому для проекцій ребръ параллелопипеда на координатныя оси получаемъ выраженія:

$$\begin{array}{lll} \text{для ребра } MA & : & \frac{\partial x}{\partial a}\partial a,\quad \frac{\partial y}{\partial a}\partial a,\quad \frac{\partial z}{\partial a}\partial a; \\ \text{»}\quad \text{»}\quad MB & : & \frac{\partial x}{\partial b}\partial b,\quad \frac{\partial y}{\partial b}\partial b,\quad \frac{\partial z}{\partial b}\partial b \\ \text{и »}\quad \text{»}\quad MC & : & \frac{\partial x}{\partial c}\partial c,\quad \frac{\partial y}{\partial c}\partial c \text{ и } \frac{\partial z}{\partial c}\partial c. \end{array}$$

Но изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что объемъ косоугольнаго параллелопипеда равняется опредѣлителю, составленному изъ проекцій ребръ на координатныя оси; поэтому, называю буквою μ плотность жидкости, наполняющей параллелопипедъ безъ пустотъ внутри, получаемъ для массы параллелопипеда выраженіе

$$\mu\left[\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\cdot\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\cdot\frac{\partial z}{\partial b}\right)+\frac{\partial y}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\cdot\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial z}{\partial c}\cdot\frac{\partial x}{\partial b}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial z}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\cdot\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}\right)\right]\partial a\partial b\partial c;$$

а такъ какъ масса элементовъ жидкости во время движенія не можетъ мѣняться, то имѣемъ слѣдующее уравненіе неразрывности жидкости:

$$\mu_0 = \mu\left[\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\cdot\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\cdot\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \frac{\partial y}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\cdot\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\cdot\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial z}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\cdot\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Понятно, что изъ этого уравненія можно вывести уравненіе (3), какъ частный случай. Въ самомъ дѣлѣ, совмѣстимъ моментъ времени t_0 съ моментомъ t, а моментъ t съ моментомъ $t + \partial t$; то-есть примемъ a, b и c равными послѣдовательно x, y и z; координаты же x, y и z равными $x + u\partial t$, $y + v\partial t$ и $z + w\partial t$, μ_0 равнымъ μ и, наконецъ, μ равнымъ $\mu + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)\partial t$; тогда для производныхъ, входящихъ въ уравненіе (12), получимъ:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}\partial t, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial y}\partial t, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial z}\partial t;$$
$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial x}\partial t, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1 + \frac{\partial v}{\partial y}\partial t, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial z}\partial t;$$
$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial x}\partial t, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w}{\partial y}\partial t, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\partial t.$$

Внося эти послѣднія значенія въ уравненіе (12) и отбрасывая безконечно малыя величины высшихъ порядковъ, получимъ слѣдующее уравненіе

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

которое и совпадаетъ съ уравненіемъ (3), если замѣтимъ, что

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right) = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial x}u + \frac{\partial\mu}{\partial y}v + \frac{\partial\mu}{\partial z}w.$$

Видъ уравненія (13) приводитъ насъ къ познанію значенія суммы $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Дѣйствительно, пусть на время буква q обозначаетъ объемъ безконечно малаго элемента жидкости, тогда масса этого объема будетъ равна μq; выражая условіе, что масса эта, во время движенія элемента, не мѣняется, получаемъ:

$$\left(\frac{d(\mu q)}{dt}\right) = 0, \text{ то-есть } \mu\left(\frac{dq}{dt}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dt}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right) + \mu\,\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Сравнивая же это послѣднее уравненіе съ (13), находимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Слѣдов. сумма $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ представляетъ намъ *относительное кубическое расширеніе жидкости,* отнесенное къ единицѣ объема и къ единицѣ времени. Поэтому условіе неразрывности капельной и однородной жидкости (см. уравн. 6) показываетъ, что объемъ элементовъ такой жидкости не мѣняется съ теченіемъ времени.

24. Существуетъ еще одинъ видъ, въ какомъ можно представлять общія уравненія движенія. Хотя уравненія этого вида ничѣмъ существеннымъ не отличаются отъ уравненій Эйлера, тѣмъ не менѣе они заслуживаютъ вниманія.

Пусть V будетъ скорость движенія разсматриваемой частицы, опредѣляемая уравненіемъ $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Дифференцируя это уравненіе по x, получаемъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) = u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} + w\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Это послѣднее уравненіе, будучи вычтено изъ перваго уравненія Эйлера (см. уравн. 2), доставитъ:

$$X - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Примемъ, для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\chi \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\rho \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

тогда предъидущее уравненіе приметъ видъ:

$$X - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\chi - v\rho).$$

Второе и третье изъ уравненій Эйлера доставятъ уравненія подобныя только что полученному, такъ, что можемъ написать слѣдующія уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\chi - v\rho) \\ Y - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\rho - w\pi) \\ Z - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\pi - u\chi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Въ частномъ случаѣ, обыкновенно имѣющемъ мѣсто въ приложеніяхъ, когда внѣшнія объемныя силы допускаютъ потенціалъ, т.-е. когда выраженіе $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$ есть полнымъ дифференціаломъ въ разсужденіи координатъ нѣкоторой функціи T, будемъ имѣть:

$$X = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{и} \quad Z = \frac{\partial T}{\partial z} \quad \ldots \ldots (17)$$

а при этомъ уравненія (16), для капельной и однородной жидкости, примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\chi - v\rho) \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\rho - w\pi) \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\pi - u\chi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (18)$$

гдѣ

$$E = T - \frac{p}{\mu} - \frac{1}{2}V^2 \quad \ldots \ldots (19)$$

и

$$T = \int (X\partial x + Y\partial y + Zxz) \quad \ldots \ldots (20)$$

Въ случаѣ газообразной жидкости повсюду одинаковой температуры, нужно въ выраженіи (19) количество $\frac{p}{\mu}$ замѣнить количествомъ $\frac{1}{k}$ lognat$p$.

Примѣняя уравненія (18) къ рѣшенію вопросовъ, необходимо имѣть въ виду, что количества π, χ и ρ, опредѣляемыя уравненіями (15), удовлетворяютъ тождеству:

$$\frac{d\pi}{dx}+\frac{d\chi}{dy}+\frac{d\rho}{dz}=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

какъ въ этомъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ уравненій (15).

Можно чрезъ исключеніе количества E изъ уравненій (18), вывести новыя уравненія не заключающія внѣшнихъ силъ, а слѣдов. существующія при какихъ угодно внѣшнихъ силахъ, допускающихъ потенціалъ. Дѣйствительно, дифференцируя второе изъ уравненій (18) по z, третье по y и сравнивая результаты, найдемъ уравненіе

$$2\left[u\left(\frac{d\chi}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\right)+\chi\frac{du}{dy}+\rho\frac{du}{dz}\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)+$$
$$+2\left[\pi\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+\frac{d\pi}{dy}v+\frac{d\pi}{dz}w\right].$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого уравненія количество $2u\frac{d\pi}{dx}+2\pi\frac{du}{dx}$ и имѣя въ виду, что $\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}=2\pi$ и $\frac{d\pi}{dx}+\frac{d\chi}{dy}+\frac{d\rho}{dz}=0$, найдемъ:

$$\pi\frac{du}{dx}+\chi\frac{du}{dy}+\rho\frac{du}{dz}=\frac{d\pi}{dt}+\frac{d\pi}{dx}u+\frac{d\pi}{dy}v+\frac{d\pi}{dz}w+\pi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$$
$$=\left(\frac{d\pi}{dt}\right)+\pi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$$
$$=\left(\frac{d\pi}{dt}\right)-\frac{\pi}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right).$$

Это послѣднее уравненіе и другія два ему подобныя, какія можно вывести изъ уравненій (18), принимаютъ въ случаѣ капельной жидкости, слѣдующій простѣйшій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)&=\pi\frac{du}{dx}+\chi\frac{du}{dy}+\rho\frac{du}{dz}\\ \left(\frac{d\chi}{dt}\right)&=\pi\frac{dv}{dx}+\chi\frac{dv}{dy}+\rho\frac{dv}{dz}\\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)&=\pi\frac{dw}{dx}+\chi\frac{dw}{dy}+\rho\frac{dw}{dz}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Въ одномъ изъ слѣдующихъ NN мы возвратимся къ этимъ уравненіямъ и укажемъ тамъ на слѣдствія изъ нихъ вытекающія, а теперь переходимъ къ интегрированію уравненій движенія въ тѣхъ немногихъ частныхъ случаяхъ, въ которыхъ интегрированіе это оказывается возможнымъ

Случай установившагося движенія. Теорема Даніила Бернулли.

25. Одинъ изъ важнѣйшихъ, по своимъ приложеніямъ, частныхъ случаевъ, есть случай, такъ называемаго, *установившагося движенія жидкости.*

Установившимся или однообразнымъ движеніемъ жидкости называется такое движеніе, при которомъ всѣ обстоятельства его не мѣняются съ теченіемъ времени для каждаго заданнаго мѣста пространства, занятаго движущеюся жидкостью. Слѣдов. въ случаѣ такого движенія количества u, v, w, p, μ и внѣшнія силы должны быть функціями только координатъ x, y и z; перемѣнная же t въ составъ этихъ функцій явнымъ образомъ входить не можетъ.

И такъ, въ случаѣ установившагося движенія, должны имѣть мѣсто слѣдующія условія:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0,\ \frac{\partial p}{\partial t}=0,\ \frac{\partial \mu}{\partial t}=0 \ \text{ и } \ \frac{\partial T}{\partial t}=0;$$

а при этомъ уравненія (18) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}&=2(w\chi-v\rho)\\ \frac{\partial E}{\partial y}&=2(u\rho-w\pi)\\ \frac{\partial E}{\partial z}&=2(v\pi-u\chi)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(23)$$

Умножая эти уравненія, послѣдовательно, на dx, dy и dz и складывая, получимъ, для капельной жидкости:

$$\frac{\partial E}{\partial x}dx+\frac{\partial E}{\partial y}dy+\frac{\partial E}{\partial z}dz=dE=d\left(T-\frac{p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right)=$$
$$=2[(w\chi-v\rho)dx+(u\rho-w\pi)dy+(v\pi-u\chi)dz],$$

гдѣ dE есть уже полный дифференціалъ количества E, такъ какъ это количество времени t не содержитъ.

Положимъ теперь, что мы слѣдимъ за движеніемъ элемента жидкости по его траэкторіи, т.-е. что dx, dy и dz суть проекціи на координатныя оси элемента пути, тогда должно принять

$$dx = udt, \quad dy = vdt \quad \text{и} \quad dz = wdt$$

а при этомъ вторая часть послѣдняго уравненія превращается въ нуль и получаемъ уравненіе $d\left(T - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2}V^2\right) = 0$, изъ котораго заключаемъ, что

$$E = T - \frac{p}{\mu} - \frac{1}{2}V^2 = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Постоянная произвольная, введенная при интегрированіи, и обозначенная нами чрезъ const., сохраняетъ неизмѣнно одно и тоже значеніе для всѣхъ точекъ траэкторіи разсматриваемаго элемента, но значеніе это можетъ однако мѣняться при переходѣ отъ одной траэкторіи къ другой. Это значитъ, что постоянную const. должно разсматривать какъ функцію начальныхъ координатъ a, b и c того элемента жидкости, для котораго написано уравненіе (24). Для того, чтобы численное значеніе количества E оставалось одинаковымъ не только для всѣхъ точекъ одной и той же траэкторіи, но и для всѣхъ траэкторій, нужно чтобы было $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$; что, напр., и будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ когда для всѣхъ мѣстъ пространства, занятаго движущеюся жидкостью, количества π, χ и ρ будутъ каждое равно нулю, или же когда они будутъ удовлетворять условіямъ: $\frac{u}{\pi} = \frac{v}{\chi} = \frac{w}{\rho}$. Какимъ характернымъ обстоятельствомъ будетъ сопровождаться существующее въ этомъ послѣднемъ случаѣ движеніе, будетъ указано впослѣдствіи.

Положимъ теперь, что внѣшняя объемная сила, приложенная къ частицамъ жидкости, есть сила тяжести и что координатная ось z направлена по вертикали *снизу вверхъ*. Въ такомъ случаѣ $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$ и $T = -\int gdz = -gz$. Слѣдов. уравненіе (24) принимаетъ видъ:

$$gz + \frac{p}{\mu} + \tfrac{1}{2}V^2 = -\mathrm{const},$$

или, что одно и то же,

$$z + \frac{p}{\Delta} + \frac{V^2}{2g} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Это послѣднее уравненіе, существующее для капельной тяжелой жидкости, въ случаѣ установившагося движенія, выражаетъ собою одну изъ важнѣйшихъ теоремъ Гидродинамики, извѣстную подъ именемъ *теоремы Даніила Бернулли*. Въ уравненіи этомъ отношеніе $\frac{p}{\Delta} = \frac{p}{g\mu}$ представляетъ высоту такого вертикальнаго столбика жидкости, имѣющаго основаніемъ площадку равную единицѣ плоскостной мѣры, вѣсъ котораго равенъ давленію p. Мы будемъ высоту этого столбика жидкости, т.-е. отношеніе $\frac{p}{\Delta}$, называть *высотою, измѣряющею давленіе* p, или *піезометрической высотою* *). Членъ $\frac{V^2}{2g}$ представляетъ высоту, съ которой должно свободно падать тяжелое тѣло, чтобы въ концѣ паденія оно могло пріобрѣсти скорость V. Мы будемъ эту высоту называть *высотою, соотвѣтствующею скорости* V. Слѣдов. теорема Д. Бернулли выражаетъ собою слѣдующее свойство установившагося движенія тяжелой жидкости: *если для различныхъ положеній частицы на своей траэкторіи высоты* z, $\frac{p}{\Delta}$ и $\frac{V^2}{2g}$ *мѣняются, то онѣ мѣняются такъ, что сумма ихъ сохраняетъ постоянно одно и тоже значеніе.*

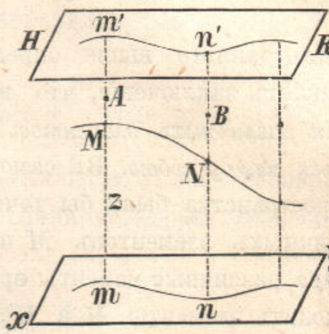
Пусть MN будетъ траэкторія того элемента жидкости, за движеніемъ котораго мы слѣдимъ, а (xy) — координатная горизонтальная плоскость, отъ которой считаютъ высоты z (фиг. 8). Пусть p и V будутъ давленіе и скорость въ точкѣ M траэкторіи, тогда откладывая на вертикальной прямой, проходящей

---

*) *Піэзометромъ* называется стеклянная трубочка съ обоихъ концовъ открытая, употребляемая Гидравликами для опредѣленія давленія въ различныхъ мѣстахъ движущейся жидкости. Удерживая эту трубочку вертикально погружаютъ нижній конецъ ея въ жидкость и замѣчаютъ высоту h, до которой поднимается эта жидкость въ трубочкѣ, а затѣмъ, зная высоту h, опредѣляютъ искомое гидродинамическое давленіе p по формулѣ $p = P + \Delta h$ (см. Гидростатика формула 13).

чрезъ точку M, сначала высоту $MA = \frac{p}{\Delta}$, послѣ высоту $Am' = \frac{V^2}{2g}$ и имѣя въ виду, что $mM = z$, получимъ точку m', разстояніе которой отъ плоскости (xy) будетъ равно $z + \frac{p}{\Delta} + \frac{V^2}{2g}$. Слѣдовательно, если сдѣлаемъ подобное же построеніе во всѣхъ точкахъ траэкторіи, то получимъ рядъ точекъ m', n', . . . которыя, согласно теоремѣ Д. Бернулли. будутъ расположены на нѣкоторой *горизонтальной плоскости* HR, положеніе которой, впрочемъ, независитъ отъ положенія координатной плоскости (xy). Эту плоскость HR называютъ *плоскостью напора* разсматриваемой траэкторіи. Если эту плоскость примемъ за координатную и разстояніе отъ нее частицы жидкости, считаемое сверху внизъ, обозначимъ чрезъ ζ, то формула (25) приметъ видъ

Фиг. 8.



$$\zeta = \frac{p}{\Delta} + \frac{V^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ, по чертежу, $\zeta = m'M$.

Такъ какъ при выводѣ общихъ формулъ равновѣсія и движенія жидкостей постоянно предпологалось, что давленія, дѣйствующія на грани элементарнаго параллелопипеда, направлены по внутреннимъ нормалямъ, то еслибы, въ какомъ либо частномъ случаѣ, получилось для давленія p отрицательное значеніе, тогда это обозначало бы, что давленіе это направлено по внѣшней нормали къ поверхности объема, на которую оно дѣйствуетъ. Но для совершенныхъ жидкостей, такое направленіе давленія невозможно, поэтому во всѣхъ формулахъ, существующихъ для совершенныхъ жидкостей, *давленіе p должно быть величиною положительною.* Вводя это условіе въ формулу (26) получаемъ неравенство

$$\zeta > \frac{V^2}{2g},$$

а такъ какъ $\frac{V^2}{2g}$ всегда болѣе нуля, то $\zeta > 0$; т.-е. *во все время установившагося движенія, разсматриваемая частица жидкости находится ниже своей напорной плоскости.*

Понятно, что теорема Д. Бернулли. въ случаѣ тяжелой газообразной жидкости, выражается формулою:

$$z + \frac{1}{gk} \operatorname{lognat} p + \frac{V^2}{2g} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Изъ даннаго выше опредѣленія установившагося движенія вытекаетъ заключеніе, что въ случаѣ такого движенія *траэкторіи различныхъ элементовъ жидкаго тѣла не могутъ пересѣкаться между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, еслибы нѣкоторая точка А пространства была бы точкою пересѣченія траэкторій двухъ различныхъ элементовъ M и M' жидкости, то этой точкѣ A, въ два различные моменты времени t и t', когда чрезъ нее будутъ проходить элементы M и M', соотвѣтствовало бы два различныхъ направленія движенія, что противурѣчило бы опредѣленію установившагося движенія. Если же траэкторіи разныхъ элементовъ жидкости не пересѣкаются между собою, то всѣ тѣ элементы, которые въ данное мгновеніе находятся на траэкторіи элемента M, находились на ней и ранѣе этого мгновенія и будутъ находиться на ней и послѣ этого мгновенія, то есть всѣ эти элементы имѣютъ общую траэкторію и движутся образуя какъ бы неразрывную нить. Различныя части этой нити, называемой *струйкою,* или *продольною фиброю движущейся жидкости,* могутъ измѣнять свою длину, т.-е. могутъ растягиваться, или сжиматься, смотря по мѣсту траэкторіи чрезъ которое продвигаются. Въ тѣхъ мѣстахъ траэкторіи гдѣ струйка растягивается скорость V движенія возростаетъ и обратно тамъ, гдѣ струйка сжимается, скорость V убываетъ. Слѣдовательно, струйки движущейся жидкости, будучи въ однихъ своихъ мѣстахъ растянуты, а въ другихъ сжаты, могутъ быть уподоблены безконечно тонкимъ нитямъ, но съ перемѣннымъ поперечнымъ сѣченіемъ. Понятно, что, въ случаѣ капельной жидкости, произведеніе изъ площади поперечнаго сѣченія струйки на скорость, соотвѣтствующую этому сѣченію, есть величина постоянная.

Случай прямолинейнаго движенія.

26. Ограничиваясь исключительно случаемъ тяжелой и капельной жидкости, положимъ, что всѣ частицы такой жидкости движутся по прямымъ и притомъ параллельнымъ между собою линіямъ, общее направленіе которыхъ составляетъ съ горизонтальною плоскостью уголъ α. Принимая это направленіе за ось x, дѣлая ось y горизонтальною и направляя ось z, внизъ, получимъ:

$$X = g\sin\alpha,\ \ Y = 0,\ \ Z = g\cos\alpha,\ \ v = 0 \ \text{ и } \ w = 0.$$

При этомъ уравненіе (6), выражающее условіе неразрывности жидкости, даетъ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, а общія уравненія движенія (2) доставляютъ

$$\left.\begin{aligned} g\sin\alpha - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ g\cos\alpha - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Послѣднія два уравненія тѣже самыя, какія имѣли бы мѣсто и въ случаѣ равновѣсія жидкости, поэтому заключаемъ, что *въ точкахъ сѣкущей плоскости, перпендикулярной къ общему направленію движенія, распредѣленіе давленія p слѣдуетъ законамъ гидростатики.* Слѣдоват. если жидкость будетъ имѣть свободную поверхность, подверженную повсюду одинаковому нормальному давленію, то такая поверхность, съ каждымъ изъ поперечныхъ сѣченій (перпендикулярныхъ къ направленію движенія), должна пересѣкаться по прямой горизонтальной линіи; поэтому поверхность эта будетъ плоскостью, наклонною къ горизонту подъ угломъ α.

Условіе $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ показываетъ, что частицы, расположенныя на какой либо прямой, параллельной оси x, въ данное мгновеніе t, имѣютъ одинаковую скорость, которая для различныхъ такихъ прямыхъ можетъ быть различна, такъ какъ $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ могутъ и не равняться нулю и которая, для одной и той же прямой въ различныя мгновенія, можетъ быть также различною, если только производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ не нуль.

Если разсматриваемое прямолинейное движеніе будетъ установившимся, т.-е. если сверхъ предъидущихъ условій будетъ имѣть мѣсто еще равенство $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, то движеніе частицъ будетъ прямолинейнымъ и равномѣрнымъ. Всѣ три уравненія движенія, въ этомъ случаѣ, будутъ тѣже самыя, какія существуютъ и въ случаѣ равновѣсія, а потому давленіе p повсюду будетъ распредѣляться по законамъ гидростатики.

Случай свободнаго движенія.

27. Свободнымъ движеніемъ жидкаго тѣла называется такое движеніе, когда каждая частица жидкости движется такъ, какъ она двигалась бы, при тѣхъ же внѣшнихъ силахъ, еслибы другихъ частицъ ее окружающихъ не было.

Понятно, что въ разсматриваемомъ случаѣ уравненія движенія частицы должны имѣть видъ

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right),\quad Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) \quad \text{и} \quad Z = \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Сравнивая же эти уравненія съ уравненіями (2), получаемъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (29)$$

откуда заключаемъ, что въ случаѣ *свободнаго движенія* жидкости, давленіе p, въ данное мгновеніе, во всѣхъ мѣстахъ жидкости одинаково. Если же свободное движеніе будетъ сверхъ того установившимся, то давленіе p будетъ постояннымъ не только во всѣхъ точкахъ, но и во всѣ мгновенія времени. Примѣромъ подобнаго движенія можетъ служить параболическая струя тяжелой жидкости, вытекающей изъ отверстія, сдѣланнаго въ стѣнкѣ сосуда.

Нѣкоторыя изъ предложеній, относящихся къ Кинематикѣ жидкаго тѣла.

28. Переходимъ къ изложенію нѣкоторыхъ изъ предложеній, относящихся къ такъ-называемой *Кинематикѣ* жидкаго тѣла, т.-е. къ той отрасли Гидродинамики, которая изучаетъ обстоятельства движенія жидкости независимо отъ дѣйствующихъ на нее силъ. Первыми изслѣдованіями въ этой отрасли Гидродинамики мы обязаны Гельмгольцу.

Понятно, что элементы жидкости, какъ тѣла, представляющаго измѣняемую систему матеріальныхъ точекъ, могутъ деформировать во время своего движенія. Безконечно малый элементъ, имѣющій форму прямоугольнаго параллелопипеда, въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени dt, можетъ испытать деформацію состоящую въ измѣненіи длины каждаго изъ его реберъ и въ измѣненіи прямыхъ угловъ, образуемыхъ этими ребрами. Отъ измѣненія длины ребръ проявятся, такъ-называемыя, *относительныя линейныя растяженія (или сжатія)*, по направленіямъ этихъ ребръ, а отъ измѣненія прямыхъ угловъ между ребрами—*относительныя скольженія, или сдвиги.*

Проведемъ чрезъ точку M жидкости, опредѣляемую въ моментъ времени t координатами x, y и z, произвольное направленіе r и возьмемъ на немъ точку R въ безконечно маломъ разстояніи dr отъ точки M. Понятно, что координаты точки R будутъ

$$x + dr\cos(r\,.\,x),\quad y + dr\cos(r\,.\,y)\quad \text{и}\quad z + dr\cos(r\,.\,z).$$

Если въ моментъ времени t скорости точки M назовемъ чрезъ u, v и w, то для скоростей точки R будемъ имѣть выраженія: $u + \frac{\partial u}{\partial r}dr$, $v + \frac{\partial v}{\partial r}dr$ и $w + \frac{\partial w}{\partial r}dr$. Слѣдов. координаты въ моментъ времени $t + dt$ будутъ:

для M: $x + udt$, $y + vdt$ и $z + wdt$,

» R: $x + dr\cos(r\,.\,x) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial r}dr\right)dt$, $y + dr\cos(r\,.\,y) + \left(v + \frac{\partial v}{\partial r}dr\right)dt$ и $z + dr\cos(r\,.\,z) + \left(w + \frac{\partial w}{\partial r}dr\right)dt$.

Разности соотвѣтствующихъ координатъ точекъ R и M представятъ проекціи на оси взаимнаго разстоянія этихъ точекъ въ моментъ $t+dt$. Проекціи эти суть слѣдующія:

$$\left(\cos(rx)+\frac{\partial u}{\partial r}\partial t\right)\partial r,\quad \left(\cos(ry)+\frac{\partial v}{\partial r}\partial t\right)\partial r\quad \text{и}\quad \left(\cos(rz)+\frac{\partial w}{\partial r}\partial t\right)\partial r,$$

а взаимное разстояніе точекъ M и R есть

$$\partial r\sqrt{\left(\cos(rx)+\frac{\partial u}{\partial r}\partial t\right)^2+\left(\cos(ry)+\frac{\partial v}{\partial r}\partial t\right)^2+\left(\cos(rz)+\frac{\partial w}{\partial r}\partial t\right)^2}.$$

Вычисляя это послѣднее выраженіе, съ точностью до безконечно-малыхъ величинъ втораго порядка, получимъ слѣдующее:

$$\partial r\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos(rx)+\frac{\partial v}{\partial r}\cos(ry)+\frac{\partial w}{\partial r}\cos(rz)\right)\partial t\right].$$

Но разстояніе точекъ M и R, въ моментъ времени t, равнялось ∂r, поэтому *относительное линейное растяженіе по направленію* r, проявившееся въ промежутокъ времени dt, можетъ быть представлено чрезъ $D_r dt$, гдѣ

$$D_r=\frac{\partial u}{\partial r}\cos(rx)+\frac{\partial v}{\partial r}\cos(ry)+\frac{\partial w}{\partial r}\cos(rz)\quad .\quad .\quad (30)$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(rx)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ry)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(rz)$$

и подобныя же выраженія существуютъ для $\frac{\partial v}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial r}$, то формулу (30) можно написать и въ слѣдующемъ видѣ:

$$D_r=\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2(rx)+\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2(ry)+\frac{\partial w}{\partial z}\cos^2(rz)+$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(ry)\cos(rz)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(rz)\cos(rx)+$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(rx)\cos(ry)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (31)$$

Совмѣщая направленіе r послѣдовательно съ направленіями x, y и z, найдемъ

$$D_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad D_y=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \text{и}\quad D_z=\frac{\partial w}{\partial z}\quad .\ .\ .\ .\quad (32)$$

Слѣдов. производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ представляютъ собою *относительныя линейныя растяженія* (отнесенныя къ единицѣ длины и къ единицѣ времени) *по направленіямъ координатныхъ осей.* Сумма этихъ трехъ линейныхъ растяженій представляетъ *относительное кубическое расширеніе* жидкости.

Возьмемъ теперь сверхъ точки R, на направленіи r, еще точку R' на направленіи r', въ разстояніи $\partial r'$ отъ точки M; тогда для проекцій на оси разстоянія MR', въ моментъ времени $t + dt$, получимъ:

$$\left(\cos(r'x) + \frac{\partial u}{\partial r'}\, dt\right) dr',\ \left(\cos(r'y) + \frac{\partial v}{\partial r'}\, dt\right) dr' \text{ и } \left(\cos(r'z) + \frac{\partial w}{\partial r'}\, dt\right) dr'$$

а для косинуса угла, образуемаго направленіями MR и MR' въ моментъ $t + dt$, найдемъ:

$$\cos(MR,\ MR') =$$

$$= \frac{\left[\left(\cos(rx)+\frac{\partial u}{\partial r}dt\right)\left(\cos(r'x)+\frac{\partial u}{\partial r'}dt\right)+\left(\cos(ry)+\frac{\partial v}{\partial r}dt\right)\left(\cos(r'y)+\frac{\partial v}{\partial r'}dt\right)+ \\ +\left(\cos(rz)+\frac{\partial w}{\partial r}\, dt\right)\left(\cos(r'z)+\frac{\partial w}{\partial r'}\, dt\right)\right]}{(1 + D_r\, .\, dt)(1 + D_{r'}\, .\, dt)}$$

Вычисляя вторую часть этого выраженія съ точностью до безконечно-малыхъ второго порядка, получимъ:

$$\begin{aligned} \cos(MR,\ MR') &= \cos(r\, .\, r') + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos(r'\, .\, x) + \frac{\partial v}{\partial r}\cos(r'\, .\, y) + \frac{\partial w}{\partial r}\cos(r'\, .\, z)\right) dt + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial r'}\cos(r\, .\, x) + \frac{\partial v}{\partial r'}\cos(r\, .\, y) + \frac{\partial w}{\partial r'}\cos(r\, .\, z)\right) dt - \\ &- \cos(r\, .\, r')(D_r + D_{r'})dt. \end{aligned}$$

Положимъ что взятыя направленія r и r' были, въ моментъ времени t, взаимноперпендикулярны, тогда уголъ между MR и MR', въ моментъ $t + dt$, будетъ безконечно-мало отличаться отъ прямого угла. Пусть количество $g_{rr'}\, dt$ *будетъ мѣрою того угла, на какой уменьшился прямой уголъ между направленіями r и r', въ теченіе времени dt.* Тогда будемъ имѣть:

$$\cos(rr') = 0,$$

$$\cos(MR,\ MR') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - g_{rr'}\ .\ \partial t\right) = \sin(g_{rr'}\ .\ \partial t) = g_{rr'}\,\partial t \text{ и}$$

$$g_{rr'} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos(r'x) + \frac{\partial v}{\partial r}\cos(r'y) + \frac{\partial w}{\partial r}\cos(r'z) + \\ + \frac{\partial u}{\partial r'}\cos(rx) + \frac{\partial v}{\partial r'}\cos(ry) + \frac{\partial w}{\partial r'}\cos(rz)\quad .\ .\ .\ (33)$$

или, замѣняя производныя $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial r'}$ и проч. равными имъ количествами,

$$g_{rr'} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\cos(rx)\cos(r'x) + 2\frac{\partial v}{\partial y}\cos(ry)\cos(r'y) + 2\frac{\partial w}{\partial z}\cos(rz)\cos(r'z) + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big[\cos(rz)\cos(r'y) + \cos(ry)\cos(r'z)\Big] + \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big[\cos(rx)\cos(r'z) + \cos(rz)\cos(r'x)\Big] + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big[\cos(ry)\cos(r'x) + \cos(rx)\cos(r'y)\Big]\ .\ .\ .\ .\ (34)$$

Количество $g_{rr'}$ и есть, такъ называемое, *относительное скольженіе площадокъ перпендикулярныхъ къ r, по направленію r'*, производящее измѣненіе угла между двумя взаимноперпендикулярными направленіями r и r'.

Совмѣщая направленія r и r' сначала съ x и y, послѣ съ y и z и наконецъ съ z и x, найдемъ:

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\quad \text{и}\quad g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\quad .\ (35)$$

Эти послѣднія скольженія, будучи умножены на ∂t, будутъ мѣрами тѣхъ угловъ, на какіе уменьшились, въ теченіе времени ∂t, углы между ребрами элементарнаго параллелопипеда, грани котораго, въ моментъ времени t, были параллельны координатнымъ плоскостямъ.

Формулы (32) и (35) опредѣляютъ намъ относительныя измѣненія, проявляющіяся въ элементахъ жидкаго тѣла во время ихъ движенія. Кромѣ этихъ измѣненій, зависящихъ отъ деформаціи элементовъ, могутъ еще происходить измѣненія отъ относительнаго вращенія элементовъ. Необходимо поэтому умѣть опредѣлять и эти вращенія.

Такъ какъ перемѣщенія элемента, опредѣляемаго координатами x, y и z, въ теченіе времени dt суть: udt, vdt и wdt, то перемѣщенія элемента, коего координаты суть $x+dx$, $y+dy$ и $z+dz$, будутъ:

$$\left(u+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz\right)dt,\quad \left(v+\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz\right)dt \quad \text{и}$$

$$\left(w+\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz\right)dt.$$

Слѣдов. относительныя перемѣщенія второго элемента (взятыя по отношенію къ первому) суть:

$$\left(\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz\right)dt,$$
$$\left(\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz\right)dt,$$
$$\left(\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz\right)dt;$$

гдѣ dx, dy и dz суть *относительныя координаты втораго элемента*.

Но изъ формулъ (15) и (35), безъ затрудненія, находимъ:

$$\frac{du}{dy}=\tfrac{1}{2}g_{xy}-\rho,\quad \frac{du}{dz}=\tfrac{1}{2}g_{zx}+\chi \quad \text{и проч.}$$

поэтому предъидущія выраженія, для относительныхъ перемѣщеній, могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}&[D_x\,.\,dx+\tfrac{1}{2}(g_{xy}\,.\,dy+g_{zx}dz)+\chi dz-\rho dy)dt\\ &[D_y\,.\,dy+\tfrac{1}{2}(g_{yz}\,.\,dz+g_{xy}dx)+\rho dx-\pi dz]dt\\ &[D_z\,.\,dz+\tfrac{1}{2}(g_{zx}\,.\,dx+g_{yz}dy)+\pi dy-\chi dx]dt\end{aligned}\right\}\quad .\quad .\quad (36)$$

Первыя три члена, въ каждомъ изъ этихъ выраженій, представляютъ относительныя перемѣщенія, происходящія отъ деформаціи элемента, а слѣдовательно количества $\chi dz-\rho dy$, $\rho dx-\pi dz$ и $\pi dy-\chi dx$ должны представлять перемѣщенія, происходящія отъ вращенія этого элемента жидкости. Дѣйствительно, количества эти, по своему виду, совершенно совпадаютъ съ тѣми формулами, которыми въ статикѣ опредѣляются вращательныя перемѣщенія твердаго тѣла и которыя носятъ названіе формулъ Эйлера.

Такимъ образомъ количества π, χ и ρ, опредѣляемыя формулами (15), суть ничто иное, какъ *проекціи на координатныя оси относительной угловой скорости вращенія элементовъ жидкости.* Называя буквою Ω эту относительную скорость вращенія будетъ имѣть:

$$\Omega^2 = \pi^2 + \chi^2 + \rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

29. Разсматривая въ № 25 случай установившагося движенія, мы видѣли, что количество E, представляющее собою полную энергію элемента, отнесенную къ единицѣ его массы, будетъ величиною независящею ни отъ времени, ни отъ координатъ, когда установившееся движеніе будетъ совершаться при условіи, что $\pi = \chi = \rho = 0$, или же при условіи, что $\frac{u}{\pi} = \frac{v}{\chi} = \frac{w}{\rho}$. Условіе $\pi = \chi = \rho = 0$ показываетъ, что движеніе жидкости совершается *безъ вращенія ея элементовъ*, а условіе $\frac{u}{\pi} = \frac{v}{\chi} = \frac{w}{\rho}$ требуетъ, чтобы *ось вращенія совпадала съ касательною къ траэкторіи*, т.-е. требуетъ, чтобы элементы жидкости имѣли винтовое движеніе.

Положимъ теперь, что обстоятельства движенія жидкаго тѣла таковы, что въ каждое данное мгновеніе времени, чрезъ каждую точку извѣстнаго пространства, занятаго движущеюся жидкостью, можно провести такую поверхность, нормали которой будутъ совпадать съ направленіями скоростей частицъ жидкости, находящихся въ это мгновеніе на поверхности. Поверхности удовлетворяющія этому условію мы будемъ называть *поверхностями поперечныхъ сѣченій движущейся жидкости.* Дифференціальное уравненіе системы такихъ поверхностей, когда онѣ существуютъ, необходимо будетъ слѣдующаго вида:

$$u dx + v dy + w dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Если первая часть этого послѣдняго уравненія будетъ полнымъ дифференціаломъ, въ разсужденіи координатъ x, y и z, нѣкоторой функціи φ, то тогда поверхности поперечныхъ сѣченій существуютъ и конечное уравненіе ихъ есть слѣдующее:

$$\varphi(x, y, z) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

гдѣ

$$\frac{d\varphi}{dx} = u, \quad \frac{d\varphi}{dy} = v \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{dz} = w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Уравненіе же (40) прямо приводитъ къ слѣдующимъ: $\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$, или, что одно и тоже: $\pi=\chi=\rho=0$. Слѣдов. заключаемъ, что *если движеніе жидкости совершается безъ вращенія ея элементовъ, то поверхности поперечныхъ сѣченій существуютъ.* Если первая часть уравненія (38) будетъ превращаться въ полный дифференціалъ при посредствѣ множителя λ, тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\partial(\lambda v)}{\partial z}=\frac{\partial(\lambda w)}{\partial y},\quad \frac{\partial(\lambda w)}{\partial x}=\frac{\partial(\lambda u)}{\partial z}\quad \text{и}\quad \frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda v)}{\partial x}.$$

То-есть

$$v\frac{\partial\lambda}{\partial z}-w\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2\pi\lambda,$$

$$w\frac{\partial\lambda}{\partial x}-u\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2\chi\lambda,$$

$$u\frac{\partial\lambda}{\partial y}-v\frac{\partial\lambda}{\partial x}=2\rho\lambda.$$

Умножая эти послѣднія уравненія послѣдовательно на u, v и w и складывая, найдемъ:

$$u\pi+v\chi+w\rho=0,\ \text{т.-е.}\ \cos(V,\Omega)=0\quad .\quad .\quad .\quad (41)$$

Слѣдов. *поверхности поперечныхъ сѣченій существуютъ также и въ томъ случаѣ, когда элементы жидкости вращаются около осей перпендикулярныхъ къ ихъ направленію движенія.*

Относительно случая, когда $\pi=\chi=\rho=0$, т.-е. когда $udx+vdy+wdz$ есть полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи φ, полезно замѣтить, что если это обстоятельство имѣло мѣсто въ нѣкоторое данное мгновеніе времени t, то оно необходимо имѣло мѣсто и во всѣ предшествовавшія ему мгновенія и будетъ имѣть мѣсто во всѣ послѣдующія мгновенія. Дѣйствительно, изъ уравненій (22) № 24 видно, что въ теченіе промежутка времени dt, количества π, χ и ρ получаютъ приращенія пропорціональныя ихъ значеніямъ, соотвѣтствующимъ мгновенію времени t; поэтому, если въ это мгновеніе количества эти равнялись нулю, то они необходимо будутъ равны нулю и въ моментъ времени $t+dt$ и притомъ безразлично, будетъ ли dt болѣе, или менѣе нуля.

Изъ уравненій (22) вытекаетъ еще нѣсколько интересныхъ заключеній. Назовемъ на время буквою i направленіе оси вращенія элемента, опредѣляемое выраженіями: $\cos(ix)=\frac{\pi}{\Omega}$, $\cos(iy)=\frac{\chi}{\Omega}$ и $\cos(iz)=\frac{\rho}{\Omega}$. Умножая уравненія (22) послѣдовательно на $\frac{\pi}{\Omega^2}$, $\frac{\chi}{\Omega^2}$ и $\frac{\rho}{\Omega^2}$, складывая ихъ вмѣстѣ и имѣя въ виду уравненіе (31), найдемъ:

$$\frac{1}{\Omega^2}\left[\pi\left(\frac{d\pi}{dt}\right)+\chi\left(\frac{d\chi}{dt}\right)+\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\right]=\frac{1}{2\Omega^2}\left(\frac{d(\Omega^2)}{dt}\right)=\left(\frac{d\log\Omega}{dt}\right)=D_i\ . \quad (42)$$

Слѣдовательно, возрастаніе и убываніе $\log\Omega$, а съ нимъ вмѣстѣ и самаго Ω, зависитъ отъ знака количества Di; поэтому можемъ сказать, что *въ тѣхъ мѣстахъ траэкторіи, въ которыхъ элементъ жидкости растягивается по направленію оси своего вращенія, угловая скорость вращенія возрастаетъ, тамъ же, гдѣ происходитъ сжатіе элемента по направленію оси вращенія, скоростъ вращенія убываетъ.*

Пусть $\pi_0\ \chi_0\ \rho_0$ будутъ угловыя скорости вращенія разсматриваемаго элемента жидкости въ тотъ моментъ времени t_0, который мы принимаемъ за начало движенія, тогда, обозначая буквами a, b, c начальныя координаты элемента, можно будетъ вмѣсто уравненій (22) взять слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}\pi&=\pi_0\frac{dx}{da}+\chi_0\frac{dx}{db}+\rho_0\frac{dx}{dc}\\ \chi&=\pi_0\frac{dy}{da}+\chi_0\frac{dy}{db}+\rho_0\frac{dy}{dc}\\ \rho&-\pi_0\frac{dz}{da}+\chi_0\frac{dz}{db}+\rho_0\frac{dz}{dc}\end{aligned}\right\}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (43)$$

Дѣйствительно, уравненія эти, при $x=a$, $y=b$ и $z=c$ даютъ $\pi=\pi_0$, $\chi=\chi_0$ и $\rho=\rho_0$ и притомъ удовлетворяютъ уравненіямъ (22). Чтобы убѣдиться въ этомъ, внесемъ въ первое изъ уравненій (22), вмѣсто π, χ и ρ, ихъ значенія изъ уравненій (43), тогда получимъ:

$$\pi_0\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{da}\right)+\chi_0\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{db}\right)+\rho_0\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dc}\right)=\left(\pi_0\frac{dx}{da}+\chi_0\frac{dx}{db}+\rho_0\frac{dx}{dc}\right)\frac{du}{dx}+$$
$$+\left(\pi_0\frac{dy}{da}+\chi_0\frac{dy}{db}+\rho_0\frac{dy}{dc}\right)\frac{du}{dy}+\left(\pi_0\frac{dz}{da}+\chi_0\frac{dz}{db}+\rho_0\frac{dz}{dc}\right)\frac{du}{dz}.$$

Такъ какъ a, b и c независятъ отъ времени t, то можно измѣнить порядокъ дифференцированія въ выраженіяхъ $\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{da}\right)$ и проч., а поэтому первую часть послѣдняго уравненія можно представить въ видѣ:

$$\pi_0 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \chi_0 \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Но $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, какъ первая производная по времени, пространства пройденнаго по направленію оси x, есть ничто иное какъ скорость u; поэтому для первой части послѣдняго уравненія имѣемъ выраженіе

$$\pi_0 \frac{\partial u}{\partial a} + \chi_0 \frac{\partial u}{\partial b} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Вторая же часть принимаетъ видъ:

$$\pi_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \chi_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial b}\right) +$$
$$+ \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial c}\right),$$

а такъ какъ $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial a}$ и проч., то и вторая часть также приводится къ виду

$$\pi_0 \frac{\partial u}{\partial a} + \chi_0 \frac{\partial u}{\partial b} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что уравненія (22) могутъ быть замѣнены уравненіями (43). При помощи же этихъ послѣднихъ уравненій не трудно доказать слѣдующее предложеніе Гельмгольца: *два смѣжныхъ элемента жидкости, имѣвшихъ общую ось вращенія, при началѣ движенія, постоянно вращаются около общей оси.*

Дѣйствительно, положимъ, что два элемента, опредѣляемые при началѣ движенія координатами a, b, c и $a + \partial a$, $b + \partial b$ и $c + \partial c$, имѣли общую ось вращенія, тогда будемъ имѣть:

$$\pi_0 = k \,.\, \partial a,\ \chi_0 = k \,.\, \partial b \ \text{ и } \ \rho_0 = k \,.\, \partial c \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ k будетъ нѣкоторый постоянный коэффиціентъ, независящій отъ времени. Въ моментъ времени t, координаты этихъ элементовъ будутъ: для перваго x, y и z, а для второго $x+\partial x$, $y+\partial y$ и $z+\partial z$. Для опредѣленія относительнаго расположенія этихъ элементовъ въ моментъ времени t, внесемъ въ уравненія (43) вмѣсто π_0, χ_0 и ρ_0 ихъ значенія, по выраженіямъ (a) тогда получимъ:

$$\pi = k\left(\frac{\partial x}{\partial a}\partial a + \frac{\partial x}{\partial b}\partial b + \frac{\partial x}{\partial c}\partial c\right) = k\,.\,\partial x,$$
$$\chi = k\,.\,\partial y,$$
$$\rho = k\,.\,\partial z.$$

Откуда видно, что разсматриваемые элементы и въ моментъ времени t будутъ вращаться около общей имъ оси.

Подвигаясь отъ одного элемента жидкости къ другому съ нимъ смѣжному, постоянно по направленію оси вращенія того элемента, чрезъ который проходимъ, мы вычертимъ внутри жидкости кривую линію. Всѣ элементы жидкости, лежащіе въ данное мгновеніе на этой кривой, образуютъ, такъ называемую, *осевую*, или *вихревую фибру жидкости*. Изъ только что доказаннаго предложенія Гельмгольца прямо вытекаетъ заключеніе, что вихревая фибра, во время своего поступательнаго движенія, *не можетъ разрываться*. Въ тѣхъ мѣстахъ вихревой фибры гдѣ она растянута, т. е. гдѣ площадь ея сѣченія меньше, тамъ угловая скорость вращенія больше, и обратно, тамъ гдѣ площадь сѣченія больше, тамъ угловая скорость вращенія меньше. Слѣдовательно вихревую фибру, подобно струйкѣ, или продольной фибрѣ жидкости, можно сравнить съ безконечно тонкою нитью съ перемѣннымъ сѣченіемъ. Такъ какъ угловыя скорости вращенія удовлетворяютъ уравненію (21), совершенно тождественному по виду съ уравненіемъ (6), какому удовлетворяютъ скорости u, v, w въ случаѣ капельной жидкости, то заключаемъ, что для вихревой фибры, подобно какъ и для продольной, произведеніе изъ угловой скорости Ω вращенія, на площадь сѣченія фибры, должно для всѣхъ мѣстъ этой фибры оставаться одинаковымъ. Если же это произведеніе, при переходѣ отъ одного сѣченія фибры къ другому съ нимъ смѣж-

[illegible], не мѣняется, то *вихревая фибра не можетъ окончиться внутри пространства занятаго жидкостью,* такъ какъ, въ такомъ случаѣ, на оконечности фибры лежалъ бы элементъ жидкости, для котораго $\Omega = 0$, а слѣдовательно площадь сѣченія на оконечности фибры была бы безконечно большою, что невозможно. Слѣдовательно вихревыя нити жидкости должны образовывать или сомкнутыя кривыя линіи, или же должны начинаться и оканчиваться на предѣлахъ ограничивающихъ жидкость, т.-е. въ точкахъ, въ которыхъ нѣтъ жидкости. Это послѣднее свойство вихревыхъ нитей, какъ оказывается изъ изслѣдованій, въ разсмотрѣніе которыхъ мы входить не будемъ, сохраняется и для вращающихся массъ жидкости конечныхъ размѣровъ; т.-е. если внутри движущейся жидкости, въ данное мгновеніе, выдѣлимъ мысленно тѣ части ея, которыя наполнены элементами обладающими вращеніемъ, то поверхности отдѣляющія эти части отъ остальной части жидкости, коей элементы не вращаются, должны представлять или нѣкоторыя кольцевыя поверхности, или же нѣкоторыя трубчатыя поверхности, опирающіеся оконечностями на поверхности ограничивающія жидкость.

Мы видѣли, что, въ случаѣ существованія поперечныхъ сѣченій, оси вращенія должны быть перпендикулярны къ траэкторіямъ элементовъ, слѣдов., въ такомъ случаѣ вихревая фибра должна всѣми своими частями лежать на поверхности поперечнаго сѣченія и всѣ элементы фибры должны переходить съ одного такого сѣченія на другое одновременно. Если поперечныя сѣченія будутъ поверхностями равно-отстоящими (параллельными) то тогда элементы жидкости принадлежащіе одной и той же вихревой фибрѣ будутъ обладать одинаковою по виличинѣ скоростью поступательнаго движенія.

30. Заключимъ Кинематику жидкаго тѣла, указаніемъ, какимъ образомъ можно опредѣлить положеніе оси относительнаго вращенія элемента.

Пусть будутъ: α, β и γ косинусы угловъ, образуемыхъ касательною къ траэкторіи съ осями координатъ, ds — элементъ дуги траэкторіи, R — ея радіусъ первой кривизны и n направленіе нормали къ плоскости соприкасанія траэкторіи. Тогда будемъ имѣть:

$$u = \alpha V,\quad v = \beta V,\quad w = \gamma V,\quad \alpha = \frac{\partial x}{\partial s},\quad \beta = \frac{\partial y}{\partial s},\quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial s}$$

и

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Дифференціальное же исчисленіе даетъ намъ слѣдующія формулы

$$\left.\begin{aligned} \cos(R,\ x) &= R\frac{\partial\alpha}{\partial s};\quad \cos(n,\ x) = R\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) \\ \cos(R,\ y) &= R\frac{\partial\beta}{\partial s};\quad \cos(n,\ y) = R\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial s} - \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right) \\ \cos(R,\ z) &= R\frac{\partial\gamma}{\partial s};\quad \cos(n,\ z) = R\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial s} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

и

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Пусть еще буква l обозначаетъ такое направленіе *перпендикулярное къ траэкторіи* разсматриваемаго элемента, подвигаясь по которому безконечно-мало приходимъ къ новому элементу жидкости, обладающему такою же по величинѣ скоростью V, какою обладаетъ и разсматриваемый нами элементъ. Для опредѣленія этого послѣдняго направленія нужно рѣшить уравненія:

$$\alpha\cos(lx) + \beta\cos(ly) + \gamma\cos(lz) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(lx) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(ly) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(lz) = 0$$

$$\cos^2(lx) + \cos^2(ly) + \cos^2(lz) = 1,$$

что сдѣлавъ на самомъ дѣлѣ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} L\cos(l,\ x) &= \gamma\frac{\partial V}{\partial y} - \beta\frac{\partial V}{\partial z} \\ L\cos(l,\ y) &= \alpha\frac{\partial V}{\partial z} - \gamma\frac{\partial V}{\partial x} \\ L\cos(l,\ z) &= \beta\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

и

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)^2} \quad . \quad . \quad (d)$$

Первое изъ уравненій (15), опредѣляющее π, даетъ:

$$2\pi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial(\gamma V)}{\partial y} - \frac{\partial(\beta V)}{\partial z} = \gamma\frac{\partial V}{\partial y} - \beta\frac{\partial V}{\partial z} + V\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right). \quad (e)$$

Для опредѣленія разности $\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}$ беремъ

$$\beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s} = \beta\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\beta + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\gamma\right) - \gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\beta}{\partial y}\beta + \frac{\partial\beta}{\partial z}\gamma\right)$$

$$= \alpha\beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \beta\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z} - \alpha\gamma\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\gamma\frac{\partial\beta}{\partial y} - \gamma^2\frac{\partial\beta}{\partial z};$$

вносимъ $1 - \alpha^2 - \gamma^2$ вмѣсто β^2 и $1 - \alpha^2 - \beta^2$ вмѣсто γ^2, получимъ:

$$\beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s} =$$

$$= \alpha\beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - (\alpha^2+\gamma^2)\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \beta\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z} - \alpha\gamma\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\gamma\frac{\partial\beta}{\partial y} + (\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}$$

$$= -\alpha^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + \alpha\beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \alpha\gamma\frac{\partial\beta}{\partial x} - \gamma\left(\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) +$$

$$+ \beta\left(\beta\frac{\partial\beta}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}.$$

Но $\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y} = -\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ и $\beta\frac{\partial\beta}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, поэтому

$$\beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} - \alpha\Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

гдѣ

$$\Theta = \alpha\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \quad . \; . \quad (g)$$

Слѣдов. $\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = \beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s} + \alpha\Theta$ и выраженіе (e) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$2\pi = \gamma\frac{\partial V}{\partial y} - \beta\frac{\partial V}{\partial z} + V\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial s} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) + \alpha\Theta V,$$

или принимая во вниманіе уравненія (a) и (c), получимъ вмѣсто формулъ (15) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi &= L\,.\cos(l\,.\,x) + \frac{V}{R}\cos(n\,.\,x) + \Theta\,.\,V\cos(s\,.\,x) \\ 2\chi &= L\,.\cos(l\,.\,y) + \frac{V}{R}\cos(n\,.\,y) + \Theta\,.\,V\cos(s\,.\,y) \\ 2\rho &= L\,.\cos(l\,.\,z) + \frac{V}{R}\cos(n\,.\,z) + \Theta\,.\,V\cos(s\,.\,z) \end{aligned}\right\} . \quad (44)$$

Эти формулы показываютъ какимъ образомъ существующее вращеніе элемента разлагается на три вращенія, вокругъ направленій l, n и s. Въ частномъ случаѣ, когда будутъ существовать поверхности поперечныхъ сѣченій, опредѣляемыя уравненіемъ $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$, интегрирующимся при посредствѣ множителя, количество Θ будетъ равно нулю и тогда ось вращенія будетъ лежать въ плоскости направленій l и n т.-е. въ касательной плоскости къ поверхности поперечнаго сѣченія. Если при этомъ траэкторіи будутъ прямыми линіями, радіусъ R будетъ ровенъ безконечности и ось вращенія совпадетъ съ направленіемъ l.

Можно доказать, что, *при существованіи поперечныхъ сѣченій, если притомъ движеніе будетъ установившимся, ось вращенія элемента направляется перпендикулярно къ плоскости соприкасанія траэкторіи*. Въ самъ дѣлѣ, полная производная количества π по времени, можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\left(\frac{d\pi}{dt}\right) = \frac{\partial\pi}{\partial t} + V\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\pi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\pi}{\partial z}\gamma\right) = \frac{\partial\pi}{\partial t} + V\frac{\partial\pi}{\partial s};$$

слѣдов., въ случаѣ установившагося движенія $\left(\frac{d\pi}{dt}\right) = V\frac{\partial\pi}{\partial s}$; поэтому уравненія (22), для такого случая принимаютъ видъ:

$$V\frac{\partial\pi}{\partial s} = \pi\frac{\partial u}{\partial x} + \chi\frac{\partial u}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$V\frac{\partial\chi}{\partial s} = \pi\frac{\partial v}{\partial x} + \chi\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$V\frac{\partial\rho}{\partial s} = \pi\frac{\partial w}{\partial x} + \chi\frac{\partial w}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Но $\chi\frac{\partial u}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{\partial z} = \chi\frac{\partial v}{\partial x} + \rho\frac{\partial w}{\partial x}$, поэтому, что это равенство даетъ $\chi\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ т.-е. $\chi\rho = \rho\chi$. Подобнымъ образомъ убѣдимся, что $\pi\frac{\partial v}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial z} = \pi\frac{\partial u}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial y}$ и $\pi\frac{\partial w}{\partial x} + \chi\frac{\partial w}{\partial y} = \pi\frac{\partial u}{\partial z} + \chi\frac{\partial v}{\partial z}$, и слѣдов., предъидущія уравненія напишутся въ видѣ:

$$V\frac{\partial\pi}{\partial s} = \pi\frac{\partial u}{\partial x} + \chi\frac{\partial v}{\partial x} + \rho\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$V\frac{\partial\chi}{\partial x} = \pi\frac{\partial u}{\partial y} + \chi\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$V\frac{\partial\rho}{\partial s} = \pi\frac{\partial u}{\partial z} + \chi\frac{\partial v}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Умножая же эти уравненія на α, β и γ и складывая вмѣстѣ, получимъ:

$$V\left(\alpha\frac{\partial\pi}{\partial s}+\beta\frac{\partial\chi}{\partial s}+\gamma\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)=\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\gamma\right)+$$

$$+\chi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\gamma\right)+\rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}\alpha+\frac{\partial w}{\partial y}\beta+\frac{\partial w}{\partial z}\gamma\right)$$

$$=\pi\frac{\partial u}{\partial s}+\chi\frac{\partial v}{\partial s}+\rho\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$=\pi\frac{\partial(\alpha V)}{\partial s}+\chi\frac{\partial(\beta V)}{\partial s}+\rho\frac{\partial(\gamma V)}{\partial s}$$

$$=(\pi\alpha+\chi\beta+\rho\gamma)\frac{\partial V}{\partial s}+V\left(\pi\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\chi\frac{\partial\beta}{\partial s}+\rho\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right).$$

Но, при существованіи поперечныхъ сѣченій, количество $\pi\alpha+\chi\beta+\rho\gamma=0$. Производная же, взятая по s отъ этого равенства, даетъ:

$$\alpha\frac{\partial\pi}{\partial s}+\beta\frac{\partial\chi}{\partial s}+\gamma\frac{\partial\rho}{\partial s}=-\left(\pi\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\chi\frac{\partial\beta}{\partial s}+\rho\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right);$$

поэтому, выше написанное уравненіе приводитъ къ слѣдующему:

$$\pi\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\chi\frac{\partial\beta}{\partial s}+\rho\frac{\partial\gamma}{\partial s}=0$$

или, что одно и то же,

$$Cos\,(\iota.\ R)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (45)$$

гдѣ ι есть направленіе оси вращенія элемента. Условіе (45) и доказываетъ наше предложеніе.

Введеніе въ уравненія движенія жидкостей членовъ зависящихъ отъ гидравлическихъ сопротивленій. Уравненія Навье.

31. До сихъ поръ мы предполагали, что на каждый элементъ жидкости дѣйствуютъ только внѣшнія силы X, Y, Z и давленіе p, приложенное къ поверхностямъ элемента и направленное по внутреннимъ нормалямъ. Въ дѣйствительности же, при движеніи жидкостей, существующихъ въ природѣ, проявляются еще особаго рода сопротивленія, дѣйствіе которыхъ можно уподобить дѣйствію тренія. Законы дѣйствія этихъ сопротивленій, которыя мы будемъ называть *гидравлическими сопротивленіями*, существенно отличаются отъ законовъ тренія тѣлъ твердыхъ тѣмъ, что гидравлическое треніе при покойномъ состояніи частицъ жидкости равно нулю, что оно не зависитъ отъ давленія и наконецъ, что оно возростаетъ съ возростаніемъ относительной скорости движенія частицъ жидкости.

Ньютонъ первый предложилъ гипотезу, что *внутреннія гидравлическія тренія* (треніе жидкости о жидкость) *суть линейныя функціи относительныхъ скоростей*, а Навье, допуская эту гипотезу, первый дополнилъ уравненія движенія жидкости членами, зависящими отъ этихъ треній.

Желая получить уравненія Навье, нужно гидравлическія сопротивленія разсматривать какъ силы, приложенныя къ поверхностямъ того элементарнаго объема жидкости, движеніе котораго разсматриваемъ, причемъ направленіе каждой изъ этихъ силъ должно вообще принимать наклоннымъ къ той площадкѣ, на которую она дѣйствуетъ. Такимъ образомъ если внутри массы жидкости, въ данное мгновеніе, выдѣлимъ мысленно безконечно малый параллелопипедъ съ ребрами, параллельными координатнымъ осямъ x, y, z, то силы, приложенныя къ его гранямъ и представляющія дѣйствіе на него окружающей массы жидкости, будутъ, вообще говоря, не перпендикулярны къ гранямъ, если только не пренебрегаемъ гидравлическими сопротивленіями.

Разсмотримъ сначала грани ближайшія къ координатнымъ плоскостямъ и усилія, дѣйствующія на единицѣ площади каждой изъ нихъ, обозначимъ послѣдовательно чрезъ p_x, p_y и p_z; гдѣ p_x есть подобное усиліе, приложенное къ грани, перпендикулярной къ оси X-*овъ* и т. д. Каждое изъ этихъ усилій, какъ наклонное къ гранямъ, можетъ быть разложено на три составляющихъ параллельныхъ координатнымъ осямъ. Если условимся проекцію силы p_λ на направленіе μ обозначать чрезъ $p_{\lambda\mu}$, т.-е. если примемъ вообще

$$p_{\lambda\mu} = p_\lambda \cdot \cos(p_\lambda,\ \mu),$$

то составляющія давленія p_x будутъ: p_{xx}, p_{xy} и p_{xz}; подобнымъ образомъ составляющія давленія p_y будутъ: p_{yx}, p_{yy} и p_{yz}, и составляющія давленія p_z будутъ: p_{zx}, p_{zy} и p_{zz}. Слѣдов., силы приложенныя къ гранямъ, ближайшимъ къ координатнымъ плоскостямъ, будутъ:

$$
\begin{array}{lll}
\text{на грани } \partial y \partial z: & -\partial y \partial z p_{xx}, \; -\partial y \partial z p_{xy}, \; -\partial y \partial z p_{xz}; \\
\quad » \quad » \quad \partial z \partial x: & -\partial z \partial x p_{yx}, \; -\partial z \partial x p_{yy}, \; -\partial z \partial x p_{yz}; \\
\quad » \quad » \quad \partial x \partial y: & -\partial x \partial y p_{zx}, \; -\partial x \partial y p_{zy}, \; -\partial x \partial y p_{zz}.
\end{array}
$$

Понятно, что силы, приложенныя къ гранямъ параллелопипеда, дальнѣйшимъ отъ координатныхъ плоскостей, будутъ:

$$\partial y \partial z\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\partial x\right),\ \partial y \partial z\left(p_{xy}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}\partial x\right) \text{ и } \partial y \partial z\left(p_{xz}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}\partial x\right);$$

$$\partial z \partial x\left(p_{yx}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\partial y\right),\ \partial z \partial x\left(p_{yy}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}\partial y\right) \text{ и } \partial z \partial x\left(p_{yz}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}\partial y\right);$$

$$\partial x \partial y\left(p_{zx}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\partial z\right),\ \partial x \partial y\left(p_{zy}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\partial z\right) \text{ и } \partial x \partial y\left(p_{zz}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\partial z\right).$$

Слѣдов., въ случаѣ равновѣсія такого параллелопипеда, должны существовать уравненія:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{zx}}{\partial z}+\mu X=0 \\
\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{zy}}{\partial z}+\mu Y=0 \\
\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\mu Z=0
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

и

$$p_{xy}=p_{yx}, \quad p_{yz}=p_{zy} \quad \text{и} \quad p_{zx}=p_{xz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Удовлетворяя уравненіямъ (a), мы уничтожаемъ возможность параллелопипеду получить поступательныя перемѣщенія, а удовлетворяя уравненіямъ (b), уничтожаемъ его вращательныя перемѣщенія *).

Еслибы вмѣсто параллелопипеда разсматривали безконечно малый тетраэдръ, то для его равновѣсія, вмѣсто уравненій (a), получили бы слѣдующія:

---

*) См. Руководство къ изученію законовъ сопротивленій строительныхъ матеріаловъ съ присоединеніемъ общихъ началъ теоріи упругости твердыхъ тѣлъ. И Евпевича. Спб. 1868. Уравн. (20) и (21).

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos(nx) + p_{yx}\cos(ny) + p_{zx}\cos(nz) \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(nx) + p_{yy}\cos(ny) + p_{zy}\cos(nz) \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(nx) + p_{yz}\cos(ny) + p_{zz}\cos(nz) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (c)$$

гдѣ буквою n обозначено направленіе внѣйшней нормали къ той грани тетраэдра, которая наклонна къ координатнымъ плоскостямъ.

Имѣя уравненія равновѣсія (a), получаемъ изъ нихъ, на основаніи начала Д'Аламберта, слѣдующія уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} \mu X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= \mu\left(\frac{du}{dt}\right) \\ \mu Y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} &= \mu\left(\frac{dv}{dt}\right) \\ \mu Z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= \mu\left(\frac{dw}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Эти послѣднія уравненія могутъ быть разсматриваемы какъ общія уравненія движенія твердаго упругаго тѣла. Въ случаѣ тѣла жидкаго, уравненія эти могутъ быть представлены въ другомъ видѣ. Въ послѣднемъ случаѣ на каждую изъ силъ p_{xx}, p_{xy} и проч. мы можемъ смотрѣть какъ на равнодѣйствующую изъ того давленія p, какое существуетъ на граняхъ параллелопипеда, когда пренебрегаемъ гидравлическими сопротивленіями и изъ силы выражающей это самое сопротивленіе.

Но, пренебрегая сопротивленіями, должно нормальныя силы p_{xx}, p_{yy} и p_{zz} считать равными давленію p, взятому съ минусомъ (какъ направленному по внутренней нормали), а касательныя силы p_{xy}, p_{yz} и p_{zx}—принимать за нули. Поэтому, когда гидравлическими треніями пренебрегать не желаемъ, нужно принять:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} = -p + q_{xx},\ \ p_{yy} = -p + q_{yy} \ \text{ и } \ p_{zz} = -p + q_{zz}, \\ p_{xy} = q_{xy},\ \ p_{yz} = q_{yz} \ \text{ и } \ p_{zx} = q_{zx} \end{aligned}\right\} . \ (d)$$

гдѣ q_{xx}, q_{yy}, q_{xy} и проч. и суть усилія, происходящія отъ гидравлическихъ треній, слѣдовательно, пропорціональныя относительнымъ скоростямъ.

Остается найти выраженія для сихъ послѣднихъ силъ.

Если скорости элемента жидкости, опредѣляемаго координатами x, y и z, назовемъ чрезъ u, v и w, то скорости, въ тотъ же моментъ времени t, элемента, коего координаты суть $x+dx$, $y+dy$ и $z+dz$, будутъ:

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\ v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz \text{ и }$$

$$w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Слѣдовательно, относительныя скорости второго элемента выражаются линейнымъ образомъ чрезъ производныя скоростей u, v и w по координатамъ; поэтому, допуская гипотезу Ньютона, необходимо и силы q_{xx}, q_{xy} и проч. разсматривать какъ линейныя функціи этихъ же производныхъ. Такимъ образомъ зависимость гидравлическихъ сопротивленій отъ частныхъ производныхъ скоростей u, v и w та же самая, что и зависимость упругихъ силъ отъ частныхъ производныхъ перемѣщеній точекъ упругаго тѣла. Если при этомъ замѣтимъ, что законы сложенія и разложенія скоростей тѣ же, что и законы сложенія и разложенія перемѣщеній и, что однородную жидкость должно разсматривать какъ изотропное тѣло, то окончательно убѣдимся, что искомая зависимость гидравлическихъ сопротивленій отъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и проч. должна быть вида *):

$$\left.\begin{aligned}
q_{xx}&=A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2B\frac{\partial u}{\partial x}\\
q_{yy}&=A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2B\frac{\partial v}{\partial y}\\
q_{zz}&=A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2B\frac{\partial w}{\partial z}\\
q_{yz}=B\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ q_{zx}&=B\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ q_{xy}=B\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}\ .\quad \text{(e)}$$

Если же ограничимся случаемъ капельной жидкости, для которой условіе неразрывности есть

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

то для такой жидкости будемъ имѣть:

*) См. тамъ же, уравненія (34), (35) и (10).

$$\left.\begin{aligned} q_{xx}=2B\frac{\partial u}{\partial x},\ q_{yy}=2B\frac{\partial v}{\partial y},\ q_{zz}=2B\frac{\partial w}{\partial z} \\ q_{yz}=B\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ q_{zx}=B\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ q_{xy}=B\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \ . \ (47)$$

Количество B есть, такъ называемый, *коэффиціентъ врутренняго тренія жидкости*, зависящій отъ рода жидкости и ея температуры.

Если будемъ разсматривать этотъ коэффиціентъ какъ количество постоянное, не зависящее ни отъ координатъ, ни отъ времени (какъ это дѣлалъ Навье), то уравненія (46), при помощи формулъ (d) и (47) доставятъ намъ слѣдующія общія уравненія движенія капельной однородной жидкости, принадлежащія *Навье:*

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{B}{\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)= \\ =\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w \\ Y-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{B}{\mu}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right)= \\ =\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w \\ Z-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{B}{\mu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{dw}{dt}\right)= \\ =\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w \end{aligned}\right\} \ . \ (48)$$

При существованіи условія $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$, можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=2\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\pi}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=2\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ (49)$$

Слѣдовательно, угловыя скорости вращенія элементовъ капельной несовершенной жидкости находятся въ зависимости отъ гидравлическихъ треній, такъ какъ чрезъ производныя этихъ угловыхъ скоростей и выражаются въ уравненіяхъ (48) тѣ члены, которые представляютъ собою проекціи на оси координатъ силы тренія; поэтому движеніе несовершенной жидкости, сопровождающееся внутренними треніями, необходимо должно сопровождаться и вращеніемъ ея элементовъ и притомъ со скоростями, которыя не могутъ быть одинаковыми для всѣхъ элементовъ.

32. Буссинекъ (Boussinesq) въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ подъ заглавіемъ: «Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides», помѣщенномъ въ журналѣ Ліувиля за 1868 годъ, примѣняетъ уравненія Навье къ одному частному случаю движенія жидкости, именно къ случаю установившагося прямолинейнаго движенія параллельными струйками и достигаетъ результатовъ, заслуживающихъ вниманія.

Въ настоящемъ № мы выведемъ, съ возможною краткостью, главнѣйшіе результаты, полученные въ указанномъ мемуарѣ и извлечемъ изъ нихъ заключенія относительно гидравлическихъ сопротивленій.

Намъ уже извѣстно, что кромѣ уравненій (48), существующихъ для всѣхъ частицъ жидкости, необходимо имѣть еще особыя уравненія для частицъ, лежащихъ на поверхностяхъ, ограничивающихъ жидкость. Буссинекъ принимаетъ, что частицы свободной поверхности не испытываютъ чувствительнаго тренія отъ газообразной среды соприкасающейся къ этой поверхности, поэтому для этихъ частицъ особыя условія должны быть тѣ же, что и въ случаѣ равновѣсія, то-есть силы, дѣйствующія на свободную поверхность, должны быть нормальны къ поверхности и должны равняться давленію на нее отъ окружающей среды. Для частицъ же, находящихся на стѣнкѣ сосуда, или канала, въ которомъ движется жидкость, если эта стѣнка смачивается жидкостью, Буссинекъ принимаетъ скорости u, v и w равными нулю, на основаніи слѣдующихъ соображеній: если, при чрезвычайно малой разницѣ въ скоростяхъ двухъ смежныхъ частицъ жидкости, проявляется чувствительное гидравлическое сопротивленіе, то при конечной разности скоростей это сопротивленіе должно быть чрезвычайно большимъ. Но сила тренія жидкости о твердую, неподвижную стѣнку сравнима съ силою тренія между частицами жидкости другъ о друга, поэтому необходимо допустить весьма малую скорость для частицъ касающихся стѣнокъ, т.-е. выражая это условіе аналитически, должно скорость такихъ частицъ принять за нуль.

Допуская эти условія для частицъ, лежащихъ на предѣлахъ жидкости, приступимъ къ разсмотрѣнію установившагося, прямолинейнаго движенія тяжелой жидкости. Направимъ ось x параллельно общему движенію всѣхъ частицъ, ось y расположимъ горизонтально, а z направимъ въ вертикальной плоскости внизъ; тогда, обозначая буквою α уголъ наклоненія оси x къ горизонту, получимъ:

$$X = g\sin\alpha,\ Y = 0,\ Z = g\cos\alpha,\ v = 0,\ w = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Условіе же неразрывности жидкости доставитъ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, Поэтому уравненія Навье примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \Delta\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (a)$$

Уравненія же (47) даютъ:

$$q_{xx} = q_{yy} = q_{zz} = 0,\ q_{yz} = 0,\ q_{zx} = B\frac{\partial u}{\partial z} \ \text{ и } \ q_{yx} = B\frac{\partial u}{\partial y}$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} &p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p \\ &p_{yz} = 0,\ p_{zx} = B\frac{\partial u}{\partial z} \ \text{ и } \ p_{yx} = B\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (b)$$

Такъ какъ поверхности, ограничивающія жидкость, въ разсматриваемомъ случаѣ, могутъ быть только цилиндрическими съ производящими параллельными оси x — овъ, то, называя буквою n направленіе нормали въ какой-либо точкѣ, ограничиющей поверхности, нужно принять $\cos(nx) = 0$; поэтому уравненія (c) предъидущаго № для проекцій силы p_n, дѣйствующей на единицу площади ограничивающей поверхности, даютъ:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= B\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz)\right) \\ p_{ny} = -p\cos(ny) \quad &\text{и} \quad p_{nz} = -p\cos(nz) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (c)$$

Примѣняя эти уравненія къ свободной поверхности, на которую могутъ дѣйствовать только силы къ ней перпендикулярныя, должно принять $p_{nx} = 0$, а слѣдов., для точекъ свободной поверхности должно удовлетворяться условіе:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (d)$$

Но послѣднія два изъ уравненій движенія (a) показываютъ, что давленіе въ плоскости поперечнаго сѣченія распредѣляется по законамъ гидростатики, какъ и въ случаѣ совершенной жидкости, поэтому свободная поверхность въ разсматриваемомъ случаѣ есть плоскость, наклоненная къ горизонту подъ угломъ α и параллельная оси y—овъ, и для всѣхъ ея точекъ $\cos(ny) = 0$, а слѣдов., уравненіе (d) должно быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (e)$$

Обратимся теперь къ общимъ уравненіямъ движенія (a). Дифференцируя первое изъ этихъ уравненій по y и имѣя въ виду, что $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Затѣмъ, дифференцируя первое же уравненіе по z, а третье по x и сравнивая результаты, найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Но $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; слѣдов., заключаемъ, что количество $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ не содержитъ ни x, ни y, ни z, ни t; т.-е. количество это есть величина постоянная, обозначая которую чрезъ $-L$, получимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Умножая уравненія (a) послѣдовательно на ∂x, ∂y, ∂z, складывая вмѣстѣ и интегрируя, найдемъ:

$$\Delta(\sin\alpha \,.\, x + \cos\alpha \,.\, z) - p = BLx + C \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

гдѣ C есть новая постоянная величина, не зависящая нетолько отъ x, y и z, но и отъ времени t, такъ какъ въ случаѣ установившагося движенія $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$.

И такъ имѣемъ для какой угодно частицы жидкости уравненія:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + L = 0 \\ p = (\Delta\sin\alpha - BL)x + \Delta\cos\alpha \,.\, z - C \\ L = \dfrac{\Delta\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x}}{B} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

для частицы же, лежащей на свободной поверхности:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

и наконецъ для частицы, лежащей на стѣнкѣ

$$u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Положимъ теперь, что кромѣ даннаго прямолинейнаго канала (или трубы) съ движущеюся въ немъ жидкостью, имѣется еще другой каналъ, поперечныя сѣченія котораго геометрически подобны сѣченію даннаго. Пусть m будетъ коэффиціентъ пропорціональности соотвѣтствующихъ размѣровъ этихъ сѣченій и y, z и y', z' координаты соотвѣтствующихъ точекъ сѣченій; тогда будемъ имѣть $z' = mz$ и $y' = my$. Уравненіе же кривой $f(y, z) = 0$, пересѣченія стѣнокъ съ поперечнымъ сѣченіемъ перваго канала, для кривой второго канала будетъ $f(my, mz) = 0$. Но это послѣднее уравненіе непремѣнно будетъ однороднымъ относительно y, z и тѣхъ параметровъ которые обозначаютъ длину и такъ какъ параметры эти будутъ также въ m разъ больше для второй кривой, то въ уравненіи $f(my, mz) = 0$, коэффиціентъ m сократится и уравненіе кривой для сѣченія второго канала будетъ то же, что и для кривой перваго.

Затѣмъ, для второго сѣченія будемъ имѣть:

для всѣхъ точекъ $\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + L' = 0,$

для свободной поверхности

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = 0,$$

для стѣнки $u' = 0.$

Или, имѣя въ виду, что $\partial y' = m\partial y$ и $\partial z' = m\partial z$, для всѣхъ точекъ

$$\frac{\partial^2 u'}{m^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{m^2 \partial z^2} + L' = 0,$$

для свободной поверхности

$$\frac{\partial u'}{m \partial z} = 0;$$

для стѣнки $u' = 0.$

Но эти уравненія можно написать въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{L}{m^2 L'} u'\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{L}{m^2 L'} u'\right)}{\partial z^2} + L = 0$$

$$\frac{\partial \left(\frac{L}{m^2 L'} u'\right)}{\partial z} = 0 \text{ и } \left(\frac{L}{m^2 L'} u'\right) = 0.$$

Сравнивая же эти послѣднія уравненія съ уравненіями (A), (B) и (C) видимъ, что

$$u = \frac{L}{m^2 L'} u'.$$

Если же площади поперечныхъ сѣченій перваго и второго каналовъ обозначимъ чрезъ σ и σ', то получимъ $\sigma' = m^2\sigma$, а потому

$$\frac{u'}{L'\sigma'} = \frac{u}{L\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

т.-е. *скорости въ соотвѣтствующихъ точкахъ подобныхъ сѣченій пропорціональны количеству* L *и площади сѣченія, а слѣдов. расходъ или количество жидкости, протекающей въ единицу времени чрезъ поперечное сѣченіе, пропорціонально количеству* L *и квадрату площади сѣченія.*

Если жидкость движется въ открытомъ каналѣ и имѣетъ свободную поверхность, подверженную на всемъ своемъ протяженіи одинаковому атмосферному давленію, тогда $\frac{dp}{dx}$ должно считать равными нулю, и тогда

$$L = \frac{\Delta \sin\alpha}{B};$$

Слѣдовательно, *въ случаѣ открытаго канала скорость пропорціональна паденію, т.-е. синусу угла* α.

Если жидкость движется въ горизонтальной трубѣ, или же въ трубѣ такого малаго діаметра, что вѣсомъ заключающейся въ ней жидкости можно пренебречь (волосная трубочка), тогда $L = -\frac{1}{B} \cdot \frac{dp}{dx}$ или, обозначая буквою l длину трубы и буквою P разность давленій, дѣйствующихъ въ начальномъ и конечномъ сѣченіяхъ, получимъ $L = \frac{1}{B} \cdot \frac{P}{l}$; слѣдовательно, *въ случаѣ горизонтальной или же весьма тонкой трубочки, скорость движущейся въ ней жидкости пропорціональна разности давленій, дѣйствующихъ на оконечностяхъ трубочки и обратно пропорціональна длинѣ ея.*

Всѣ эти законы движенія совершенно подтверждаются опытами Пуазейля надъ истеченіемъ жидкостей изъ оконечности волосныхъ трубочекъ, а потому *законъ Ньютона, указывающій на зависимость внутренняго тренія отъ относительныхъ скоростей, должно считать вполнѣ вѣрнымъ.* Въ случаѣ движенія воды въ волосной трубочкѣ, Пуазейль даетъ слѣдующую формулу для расхода:

$$Q = 183{,}783\,\frac{Pd^4}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

гдѣ P есть разность давленій въ килограммахъ на 1 квадратный метръ, а l и d длина и діаметръ трубки въ метрахъ же. При помощи этой формулы можно въ нашихъ формулахъ опредѣлить численное значеніе коэффиціента B для воды. Дѣйствительно, положимъ, что поперечное сѣченіе ограничено окружностью, коей уравненіе есть

$$\frac{y^2+z^2}{(\frac{1}{2}d)^2} - 1 = 0,$$

тогда для скорости u получимъ выраженіе

$$u = \frac{L}{16}\,d^2\left(1 - \frac{y^2+z^2}{(\frac{1}{2}d)^2}\right)$$

которое удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + L = 0$$

и обращаетъ u въ нуль при значеніяхъ y и z удовлетворяющихъ уравненію круга діаметра d.

Для расхода Q получаемъ:

$$Q = \int\!\!\int u\,\partial y\,\partial z = \frac{Ld^2}{16}\left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{I}{(\frac{1}{2}d)^2}\right),\ \text{гдѣ}\ I = \int\!\!\int (y^2+z^2)\,\partial y\,\partial z$$

есть полярный моментъ инерціи круга относительно его центра, т.-е. $I = \frac{\pi d^4}{32}$. Слѣдовательно, $Q = L\,\frac{\pi d^4}{128}$, или, внося мѣсто L его величину $\frac{1}{B}\,\frac{P}{l}$, окончательно, получаемъ:

$$Q = \frac{\pi}{128B} \cdot \frac{Pd^4}{l}.$$

Сравнивая эту формулу съ эмпирическою формулою Пуазейля, находимъ $\frac{\pi}{128B} = 183{,}783$, откуда

$$B = \frac{\pi}{128 \times 183{,}783} = 0{,}0001336 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Отсюда видимъ, что коэффиціентъ внутренняго тренія для воды очень малъ и что, слѣдовательно, требуется быстрое измѣненіе скорости при переходѣ отъ одной струйки къ другой для того, чтобы обнаружилось чувствительное по величинѣ треніе.

Если теперь положимъ, что вода движется въ цилиндрической трубѣ, коей радіусъ равенъ 1 метру, наполняя эту трубу только до половины, то уравненіе стѣнки останется прежнее, а уравненіе свободной поверхности будетъ $z=0$; слѣдовательно, условіе $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ для этой поверхности, теперь должно удовлетворяться при $z=0$. Найденное выше выраженіе для скорости u

$$u=\frac{Ld^2}{16}\left(1-\frac{y^2+z^2}{(\frac{1}{2}d)^2}\right)$$

удовлетворяетъ условію $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ при $z=0$, и попрежнему превращаетъ u въ нуль для стѣнки; слѣдовательно, это выраженіе для скорости остается и для разсматриваемаго теперь случая. Изъ него для центральной струйки, положеніе которой опредѣляется координатами $y=0$ и $z=0$, находимъ $u_0=\frac{Ld^2}{16}$, или, такъ какъ $d=2$ метрамъ, $u_0=\frac{L}{4}$. Положимъ, что свободная поверхность наклонена къ горизонту, подъ угломъ коего синусъ равенъ 0,0001, тогда

$$L=\frac{\Delta \sin\hat{\alpha}}{B}=\frac{1000\times 0{,}0001}{0{,}0001336}=748{,}8 \text{ а слѣдов. } u_0=\frac{748{,}8}{4}=187{,}2 \text{ метр.}$$

Такова должна бы быть скорость центральной струйки для того, чтобы треніе могло уравновѣситься съ силою тяжести. На опытѣ, при указанныхъ размѣрахъ канала и его уклона, получилась бы скорость значительно меньше найденной. Это несогласіе теоріи съ опытомъ въ случаѣ, когда поперечное сѣченіе канала или трубы имѣетъ конечные размѣры и полное тождество теоретическихъ выводовъ съ опытными данными, когда размѣры поперечнаго сѣченія весьма малы, показываютъ, что при конечныхъ размѣрахъ сѣченія малѣйшія неровности стѣнокъ, малѣйшія варіяціи давленія на свободной поверхности производятъ значительныя уклоненія въ движеніи струекъ отъ того направленія, какое имъ указываютъ поверхности стѣнокъ. Отъ такого неправильнаго движенія жидкости является новое сопротивленіе—значительно бо̀льшее тренія, нами разсматриваемаго. Это новое сопротивленіе должно однако уменьшаться по мѣрѣ уменьшенія размѣровъ поперечнаго сѣченія и совершенно обращаться въ нуль въ волосныхъ трубкахъ, не позволяющихъ частицамъ уклоняться отъ движенія, параллельнаго стѣнкамъ. Слѣдовательно, значительное сопротивленіе, являющееся во время движенія жидкости въ каналахъ и трубахъ, должно приписать не столько тренію, происходящему отъ особаго рода сцѣпленія или прилипанія частицъ между собою (viscosité), какъ, напротивъ того, почти полному отсутствію этого сцѣпленія и происходящей отъ этого чрезвычайной удобоподвижности частицъ, позволяющей имъ уклоняться отъ среднихъ траэкторій и такимъ образомъ соударяться между собою. Это новое сопротивленіе, какъ являющееся отъ случайныхъ обстоятельствъ, не можетъ быть опредѣлено съ надлежащею точностью путемъ теоретическихъ соображеній. Впослѣдствіи мы укажемъ какъ на результаты опытовъ, сдѣланныхъ для опредѣленія сопротивленій при движеніи жидкостей въ трубахъ и открытыхъ каналахъ, такъ и на нѣкоторыя теоретическія соображенія, сюда относящіеся.

33. *Приложеніе къ движенію подпочвенной воды.* Полное согласіе опытныхъ данныхъ съ теоретическими выводами въ случаѣ движенія въ волосныхъ трубкахъ даетъ намъ право пользоваться результатами этихъ выводовъ въ такихъ случаяхъ движенія, которые по своимъ обстоятельствамъ близко подходятъ къ движенію въ упомянутыхъ трубочкахъ. Случаи такіе имѣютъ, напр., мѣсто при просачиваніи воды чрезъ слои почвы, для нея проницаемой. Такимъ образомъ, полученные выше законы движенія воды въ волосныхъ трубочкахъ можно примѣнять къ изученію обстоятельствъ движенія подпочвенной воды и къ объясненію явленій, сопровождающихъ прохожденіе воды чрезъ очищающіе ее фильтры.

Будемъ предполагать, что слой, проницаемый для воды, составленъ изъ песчинокъ шарообразной формы одинаковаго діаметра δ. Пусть F будетъ площадь поверхности соприкосновенія этого слоя съ водою, f—площадь той части этой поверхности, которая занята песчинками, и $\tilde{\omega} = F - f$ — площадь остальной части, способная пропускать воду. Предполагая, что песчинки на этой поверхности расположены въ возможно меньшемъ разстояніи другъ отъ друга, нужно каждыя три смежныя и соприкасающіяся взаимно песчинки разсматривать расположенными такъ, что ихъ центры лежатъ въ вершинахъ равносторонняго треугольника. Сторона этого треугольника будетъ равна δ, высота его будетъ равна $\delta \,.\, \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta$; слѣдовательно, площадь его будетъ $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\delta^2 = 0{,}433\delta^2$.

Площадь, занятая песчинками внутри этого треугольника, равняется половинѣ площади куга, діаметръ котораго δ, т.-е. эта площадь $= \frac{1}{2}\,\frac{\pi\delta^2}{4} = 0{,}3927\delta^2$. Слѣдов., площадь свободнаго промежутка, такъ же лежащая внутри этого треугольника, будетъ равна $0{,}0403\delta^2$.

Понятно, слѣдоват., что мы имѣемъ пропорціи:

$$\tilde{\omega} : f : F = 0{,}0403\delta^2 : 0{,}3927\delta^2 : 0{,}433\delta^2$$

изъ которыхъ находимъ:

$$\tilde{\omega} = 0{,}093F \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = 0{,}1026f.$$

Въ виду того, что форма песчинокъ уклоняется отъ шарообразной и, что онѣ не одинаковыхъ размѣровъ, нужно допустить, что онѣ на самомъ дѣлѣ укладываются плотнѣе, нежели какъ это оказалось изъ нашихъ вычисленій, т.-е. въ предъидущихъ выраженіяхъ для $\tilde{\omega}$ нужно нѣсколько уменьшить коэффиціенты пропорціональности. Мы поэтому примемъ:

$$\tilde{\omega} = 0{,}08F \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = 0{,}09f \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Если отверстіе, образуемое промежуткомъ между песчинками, уподобимъ отверстію волосной трубочки діаметромъ d, то получимъ:

$$d^2 = 0{,}09\delta^2 \quad \text{и} \quad d = 0{,}3\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Вообще, чѣмъ крупнѣе будутъ зерна проницаемаго слоя, тѣмъ больше будутъ и отверстія, пропускающія воду.

Пусть e будетъ толщина слоя, пропускающаго воду. Образованныя въ этомъ слоѣ волосныя трубочки будутъ имѣть длину l, считаемую по направленію движенія воды, необходимо большую чѣмъ e, такъ какъ частицы воды должны огибать шарообразныя поверхности песчинокъ. Понятно, что длина волосной трубочки въ слоѣ песку толщиною δ не можетъ быть менѣе $\frac{1}{2}\pi\delta = 1{,}57\delta$; поэтому можемъ принять $l = 1{,}57e$. Это значеніе можно разсматривать какъ наименьшее возможное значеніе длины l въ слоѣ толщиною e. Среднее значеніе длины l необходимо будетъ больше, такъ какъ общее направленіе движенія частицъ воды можетъ быть и не параллельнымъ толщинѣ слоя e. Предполагая, что наибольшее уклоненіе направленія движенія частицы отъ направленія e можетъ достигать до 45^0, получимъ $l_{max} = \frac{1{,}57}{0{,}7} = 2{,}24e$, а слѣдов. для средняго значенія длины l получаемъ:

$$2l = 1{,}57e + 2{,}24e, \quad \text{т.-е.} \quad l = 1{,}90e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Обратимся теперь къ формулѣ Пуазейля, данной въ предъидущемъ № и напишемъ ее въ видѣ:

$$Q = 183{,}783\Delta \,.\, \frac{P}{\Delta} \cdot \frac{d^4}{l} = 183783\, \frac{h}{l}\, d^4 = \alpha\, \frac{h}{l}\, d^4 \quad . \quad . \quad (d)$$

гдѣ $\alpha = 183783$ и $\frac{P}{\Delta} = h$ есть высота измѣряющая давленіе P.

Изъ этой формулы для скорости u движенія воды въ трубочкѣ получаемъ выраженіе:

$$u = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4}{\pi}\,\alpha d^2\,\frac{h}{l},$$

въ которомъ, замѣняя d^2 на $0{,}09\delta^2$ и l на $1{,}9e$, находимъ:

$$u = k\,\frac{h}{e} \quad \text{и} \quad k = 0{,}0603\alpha\delta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Если же для α сохранимъ то же численное значеніе, какое имѣетъ это количество въ формулѣ Пуазейля, то получимъ:

$$k = 11000\delta^2 \text{ метровъ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Инженеръ Креберъ производилъ весьма тщательные опыты для опредѣленія коэффиціента k въ формулѣ $u = k\frac{h}{e}$. На основаніи результатовъ этихъ опытовъ, помѣщенныхъ въ «Zeitung des Vereins Deutscher Inginieure» за 1884 г., №№ 31 и 32, составлена нижеслѣдующая таблица значеній коэффиціента k, соотвѣтствующихъ различнымъ діаметрамъ δ песчинокъ:

δ=0,54	0,70	0,80	0,90	миллиметровъ.
k=0,00320	0,00536	0,00958	0,0159	метровъ по Креберу.
k=0,00321	0,00539	0,00891	0,0201	метровъ по формулѣ (f).

Изъ сравненія чиселъ, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ видно, что вопросъ о движеніи воды въ проницаемой почвѣ можетъ быть рѣшаемъ, на основаніи формулы Пуазейля, съ полнымъ согласіемъ съ опытными данными даже численныхъ коэффиціентовъ.

И такъ имѣемъ формулы:

$$u = k\frac{h}{e} \text{ метровъ въ } 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$$

и

$$k = 11000\delta^2 \text{ метровъ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (53)$$

Слѣдов., для количества воды Q, протекающаго чрезъ площадь $\tilde{\omega}$ въ одну секунду, имѣемъ:

$$Q = \tilde{\omega} \, . \, u = k\tilde{\omega}\frac{h}{e} = 0{,}08kF\frac{h}{e}$$

а для количества, протекающаго чрезъ одинъ квадратный метръ поверхности слоя въ $1''$, получаемъ:

$$\frac{Q}{F} = 0{,}08k\frac{h}{e} = \mu\frac{h}{e} \text{ кубич. метровъ} \quad . \quad . \quad . \qquad (54)$$

гдѣ $\mu = 880\delta^2$.

Количество это, равно какъ и скорость u, *прямо-пропорціональны напору* h *и обратно-пропорціональны толщинѣ слоя.*

Дюпюи *) для коэффиціента μ въ формулѣ (54) даетъ, какъ среднее значеніе, число 0,0003, что соотвѣтствуетъ значенію $k = 0{,}00375$ и $\delta = 0{,}6$ *mm.* (около).

---

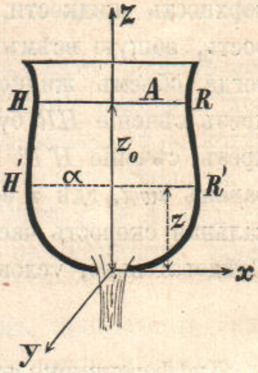
*) *Dupuit. T.* Traité theorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux. Paris, 1865.

Истеченіе тяжелой капельной жидкости чрезъ отверстія.

Случай отверстія въ днѣ сосуда.

34. Положимъ, что имѣемъ сосудъ (фиг. 9), наполненный тяжелою капельною жидкостью, въ днѣ котораго сдѣлано отверстіе и что площади поперечныхъ сѣченій (горизонтальными плоскостями) этого сосуда измѣняются непрерывно, при переходѣ отъ верхняго сѣченія къ нижнему. При такой формѣ сосуда скорости различныхъ частицъ жидкости, взятыхъ внутри сосуда, будутъ чувствительно совпадать по направленію съ вертикальною линіею, т.-е. проекціи этихъ скоростей на какое-либо горизонтальное направленіе будутъ весьма малы въ сравненіи съ проекціею на вертикаль. Расположимъ координатную плоскость xy въ горизонтальной плоскости отверстія, а ось z направимъ по вертикали снизу вверхъ, тогда для всякаго момента времени получимъ:

Фиг. 9.



$$X = Y = 0, \quad Z = -g \quad \text{и} \quad u = v = 0,$$

а при этомъ уравненія движенія Эйлера (гидравлическими сопротивленіями пренебрегаемъ) доставятъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ &-g-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}w \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Уравненія эти показываютъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ p и w суть функціи только координаты z и времени t.

Что же касается уравненія $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, выражающаго условіе неразрывности жидкости, то оно, въ разсматриваемомъ случаѣ, не даетъ намъ ничего опредѣленнаго, такъ какъ предположеніе, что u и v весьма малы въ сравненіи съ w, не влечетъ за собою заключенія, что и производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ такъ же малы въ сравненіи съ производною $\frac{\partial w}{\partial z}$, которая сама можетъ быть величиною весьма малою. Но если во время движенія не происходитъ разрыва жидкости, то объемы, протекающіе въ равныя времена чрезъ различныя поперечныя сѣченія сосуда, должны быть равны между собою. Чтобы выразить это послѣднее условіе аналитически, обозначимъ чрезъ A и z_0 площадь и вертикальное разстояніе отъ отверстія того сѣченія HR сосуда, съ которымъ, въ данное мгновеніе t, совпадаетъ свободная поверхность жидкости, а чрезъ V_0 назовемъ вертикальную скорость, общую всѣмъ частицамъ, лежащимъ въ этомъ сѣченіи; тогда объемъ жидкости, протекающей въ элементъ времени dt чрезъ сѣченіе HR, будетъ равенъ AV_0dt; объемъ же, протекающій чрезъ сѣченіе $H'R'$ въ тотъ же промежутокъ времени, будетъ равенъ $\alpha w dt$, гдѣ α есть площадь сѣченія $H'R'$, а w есть вертикальная скорость частицъ этого сѣченія въ данное мгновеніе t. Слѣдовательно, условіе неразрывности жидкости будетъ:

$$AV_0=\alpha w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Дифференцируя это послѣднее уравненіе по t и по z, имѣя притомъ въ виду, что α есть функція только отъ z, а V_0—функція только отъ t, получимъ:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{A}{\alpha}\cdot\frac{\partial V_0}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{AV_0}{\alpha^2}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial z}w=-\frac{A^2V_0^2}{\alpha^3}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

а при этомъ послѣднее уравненіе группы (a) доставитъ:

$$-g\left(1+\frac{1}{\mu g}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{A}{\alpha}\cdot\frac{\partial V_0}{\partial t}-\frac{A^2V_0^2}{\partial z}\cdot\frac{\partial\alpha}{\alpha^3}.$$

Умножая это уравненіе на dz и интегрируя его въ предѣлахъ отъ z_0 до z, получимъ:

$$2g\left(z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Delta}\right) = 2A\frac{\partial V_0}{\partial t}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\alpha} + V_0^{\,2}\left[\left(\frac{A}{\alpha}\right)^2 - 1\right],$$

или, принимая для краткости письма $\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\alpha} = b$ и внося вмѣсто $\frac{\partial V_0}{\partial t}$ и $V_0^{\,2}$ равныя имъ количества $\frac{\alpha}{A}\frac{dw}{dt}$ и $\left(\frac{\alpha w}{A}\right)^2$, будемъ имѣть

$$2g\left(z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Delta}\right) = 2b\alpha\frac{dw}{dt} + w^2\left[1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

Наконецъ, принимая

$$\sqrt{2g\,\frac{z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Delta}}{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2}} = m \quad \text{и} \quad \frac{2b\alpha}{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2} = n,$$

окончательно получимъ:

$$m^2 = n\frac{dw}{dt} + w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

Остается, для опредѣленія скорости w, интегрировать это уравненіе по времени, но при этомъ необходимо отличать два случая: *когда уровень жидкости въ сосудѣ постояненъ*, т.-е. когда разстояніе свободной поверхности отъ отверстія не мѣняется, и *когда уровень непостояненъ*. Въ первомъ случаѣ z_0 и A будутъ постоянными количествами, а во второмъ—перемѣнными, зависящими отъ времени.

Мы ограничимся пока первымъ случаемъ, предполагая притомъ, что давленіе p_0 на свободной поверхности, а слѣдов. и давленіе p въ сѣченіи $H'R'$, остаются неизмѣнными во все время истеченія. При такихъ предположеніяхъ, въ уравненіи (b) коэффиціенты m и n должно считать постоянными, а потому

$$\int_0^t dt = n\int_0^w \frac{dw}{m^2 - w^2},$$

или

$$t = \frac{n}{2m}\ \text{lognat}\left(\frac{m + w}{m - w}\right).$$

Рѣшая это послѣднее уравненіе относительно w, найдемъ:

$$w = m\frac{e^{kt}-1}{e^{kt}+1} \ldots \ldots \quad (1)$$

гдѣ
$$k = \frac{2m}{n}.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что скорость w въ сѣченіи $H'R'$, во все время истеченія, остается меньше количества m, и что она приближается къ этому количеству чрезвычайно быстро, съ увеличеніемъ времени t, такъ что, по прошествіи сравнительно небольшого промежутка времени, считая отъ начала истеченія, скорость эту можно принять равною m, а самое движеніе можно считать установившемся.

И такъ для установившагося движенія имѣемъ:

$$w = \sqrt{2g\,\frac{z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Delta}}{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2}}; \ldots \quad (e)$$

но такъ какъ для такого движенія $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, то послѣдняя формула могла бы быть получена прямо изъ уравненія (c), отбрасывая въ немъ членъ съ производною $\frac{\partial w}{\partial t}$, т.-е изъ уравненія,

$$2g\left(z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Delta}\right) = w^2\left(1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2\right),$$

которое, вмѣстѣ съ условіемъ $\alpha w = AV_0$, даетъ:

$$z_0 + \frac{p_0}{\Delta} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\Delta} + \frac{w^2}{2g} \ldots \quad (f)$$

Слѣдовательно, формула (e), какъ и должно было ожидать, прямо вытекаетъ изъ теоремы Д. Бернулли.

35. Изъ уравненія *(f)* для гидродинамическаго давленія p въ сѣченіи $H'R'$ получаемъ:

$$p = p_0 + \Delta(z_0 - z) + \frac{\Delta}{2g}(V_0^2 - w^2).$$

Такъ какъ $p_0 + \Delta(z_0 - z)$ есть гидростатическое давленіе въ сѣченіи $H'R'$, то изъ послѣдней формулы заключаемъ, что говоря вообще, *гидродинамическое давленіе не равно гидростатическому*. Гидродинамическое давленіе больше гидростатическаго для тѣхъ сѣченій, площадь которыхъ болѣе площади занятой свободною поверхностью (для которыхъ $w < V_0$), оно меньше гидростатическаго для тѣхъ сѣченій, площадь которыхъ менѣе площади свободной поверхности (для которыхъ $w > V_0$) и оно равно гидростатическому давленію только для тѣхъ сѣченій, площадь которыхъ равна площади свободной поверхности. Эти заключенія относительно гидродинамическаго давленія могутъ быть провѣрены опытомъ. Для этого нужно въ различныхъ мѣстахъ стѣнки сосуда съ перемѣннымъ поперечнымъ сѣченіемъ укрѣпить загнутыя кверху піезометрическія трубочки и наблюдать высоты стоянія въ нихъ жидкости какъ во время когда жидкость вытекаетъ изъ сосуда, такъ и во время равновѣсія, когда отверстіе закрыто.

36. Положимъ, что горизонтальное отверстіе, сдѣланное въ днѣ сосуда, находится на глубинѣ h подъ свободною поверхностью и, что a и V обозначаютъ площадь этого отверстія и скорость частицъ жидкости въ моментъ прохожденія чрезъ него. Примѣняя формулу (e) къ опредѣленію V, нужно принять $z_0 - z = h$, $\alpha = a$, $w = V$, а p разсматривать какъ давленіе, дѣйствующее на единицу площади отверстія. Слѣдов., для опредѣленія скорости V истеченія изъ отверстія имѣемъ формулу:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 + p}{\Delta}\right)}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Формула эта была выведена Д. Бернулли.

Въ частномъ случаѣ, когда площадь a отверстія весьма мала въ сравненіи съ площадью A свободной поверхности, формула эта можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\Delta}\right)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

если же притомъ давленіе p въ отверстіи будетъ равно давленію p_0 на свободной поверхности, то

$$V=\sqrt{2gh}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(4)$$

Слѣдов., въ этомъ послѣднемъ случаѣ скорость истеченія опредѣляется точно такъ же, какъ и скорость свободно падающаго тѣла съ высоты h.

Формула (4) была найдена *Торичелли* ранѣе формулы Д. Бернулли изъ наблюденій надъ высотою, до которой поднимается вода въ фонтанахъ.

Формулою (3) должно пользоваться тогда, когда давленіе на отверстіе не равно давленію на свободной поверхности: такъ, напр., еслибы нижняя часть сосуда, изъ котораго вытекаетъ жидкость, была погружена въ резервуаръ съ такою же жидкостью на нѣкоторую глубину h' подъ свободною поверхностью сего резервуара, то для давленія p получили бы: $p=p_0+\Delta h'$, если только давленіе на свободной поверхности жидкости въ резервуарѣ также равно давленію p_0. Слѣдов., для подобнаго случая истеченія, называемаго *истеченіемъ чрезъ затопленное отверстіе*, скорость V опредѣляется формулою:

$$V=\sqrt{2g(h-h')}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(5)$$

т.-е. она зависитъ отъ разности уровней жидкости въ обоихъ сосудахъ.

Всѣ эти формулы для скорости истеченія не опредѣляютъ этой скорости съ совершенною точностью, потому что при выводѣ основной формулы (2) не было принято во вниманіе существованіе гидравлическихъ сопротивленій, а въ особенности потому, что предположеніе о чрезвычайной малости скоростей u и v въ сравненіи съ w не имѣетъ мѣста для сѣченій, близъ отверстія лежащихъ. Дѣйствительно, частицы жидкости, лежащія близъ дна, но не прямо надъ отверстіемъ, могутъ войти въ послѣднее не иначе, какъ значительно уклоняясь въ своемъ движеніи отъ вертикальнаго направленія. Впослѣдствіи будетъ указано на поправку, которую должно ввести въ формулы, чтобы онѣ давали результаты болѣе согласные съ дѣйствительностью.

37. Зная скорость истеченія, не трудно найти такъ-называемый *расходъ*, т.-е. объемъ жидкости, вытекающій въ единицу времени. Предполагая, что выходящая изъ отверстія струя имѣетъ призматическую форму, т.-е. что направленіе движенія всѣхъ частицъ, въ моментъ прохожденія ихъ чрезъ отверстіе, перпендикулярно къ плоскости сего послѣдняго и что всѣ частицы проходятъ чрезъ отверстіе съ одинаковою скоростью V, должно расходъ Q принимать равнымъ объему призмы, основаніе которой равно площади a отверстія, а высота равна скорости V; слѣдов., для опредѣленія расхода Q имѣемъ формулу:

$$Q = aV \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Въ случаѣ неустановившагося движенія, когда скорость V будетъ функціею времени, расходъ Q долженъ равняться суммѣ элементарныхъ объемовъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ элементамъ dt времени, изъ которыхъ составлена единица, т.-е. въ этомъ случаѣ

$$Q = a\int_{t}^{t+1} Vdt, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

что доставитъ для расхода Q количество, зависящее отъ времени t.

38. Перейдемъ теперь къ случаю истеченія при перемѣнномъ уровнѣ, то-есть положимъ, что въ сосудъ, по мѣрѣ истеченія, притекаетъ жидкости больше или меньше, нежели сколько ея вытекаетъ. Пусть въ данное мгновеніе t, h будетъ глубина погруженія отверстія подъ свободною поверхностью, A — площадь этой поверхности и q — количество жидкости, притекающей въ единицу времени. Въ теченіи промежутка dt времени убыль жидкости въ сосудѣ будетъ равна $aVdt$, а прибыль будетъ равна qdt, гдѣ a и V суть площадь отверстія и скорость истеченія, равная $\sqrt{2gh}$, слѣдов. разность $(aV - q)dt$ представитъ собою то отрицательное приращеніе объема жидкости въ сосудѣ, отъ котораго уровень въ элементъ времени dt понижается на dh, поэтому

$$(aV - q)dt = -Adh$$

или

$$(q - a\sqrt{2gh})dt = Adh.$$

Мы будемъ интегрировать это послѣднее уравненіе въ предположеніи, что q и A постоянны, т.-е. что притокъ постояненъ и сосудъ имѣетъ призматическую форму. При такихъ предположеніяхъ получимъ:

$$t=\frac{A}{a\sqrt{2g}}\int\frac{dh}{\frac{q}{a\sqrt{2g}}-\sqrt{h}}.$$

Принимая же $h=z^2$, $dh=2zdz$, найдемъ:

$$t=\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\int\frac{zdz}{\frac{q}{a\sqrt{2g}}-z}=\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\left[C-\sqrt{h}-\frac{q}{a\sqrt{2g}}\log\left(\frac{q}{a\sqrt{2g}}-\sqrt{h}\right)\right].$$

Если при $t=0$ высота h равнялась H, то окончательно получимъ:

$$t=\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H}-\sqrt{h}+\frac{q}{a\sqrt{2g}}\log\left(\frac{q-a\sqrt{2gH}}{q-a\sqrt{2gh}}\right)\right]\quad . \quad (8)$$

Такъ какъ логариѳмъ отрицательнаго числа есть количество мнимое, а время t мнимымъ быть не можетъ, то изъ послѣдней формулы заключаемъ, что разности $q-a\sqrt{2gH}$ и $q-a\sqrt{2gh}$ должны быть съ одинаковыми знаками; поэтому, если при началѣ истеченія количество $a\sqrt{2gH}$ было болѣе q, то и во время истеченія количество $a\sqrt{2gh}$ будетъ болѣе q, и эти послѣднія количества могутъ сдѣлаться равными, т.-е. движеніе можетъ сдѣлаться установившимся только по прошествіи безконечно большого промежутка времени.

Если нѣтъ притока, тогда $q=0$ и время, нужное для того, чтобы уровень изъ H понизился до h, опредѣляется формулою:

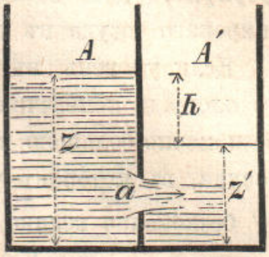
$$t=\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}\right)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Время же, нужное для того, чтобы вся жидкость, находящаяся въ сосудѣ, вытекла, дается формулою:

$$t=\frac{2A\sqrt{H}}{a\sqrt{2g}}=2\frac{AH}{a\sqrt{2gH}}\quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Такъ какъ здѣсь AH есть объемъ вытекающей жидкости, а $a\sqrt{2gH}$ есть объемъ, какой вытекалъ бы въ каждую единицу времени, еслибы уровень оставался на постоянной высотѣ H, то изъ послѣдней формулы заключаемъ, что для опорожненія сосуда требуется въ два раза болѣе времени, нежели сколько нужно для вытеканія такого же объема жидкости при постоянномъ уровнѣ.

Фиг. 10.



39. Положимъ еще, что имѣемъ два сообщающихся между собою сосуда (фиг. 10), площади A и A' поперечныхъ сѣченій которыхъ постоянны и, что жидкость чрезъ отверстіе a переливается изъ перваго сосуда во второй. Пусть z и z' будутъ высоты стоянія уровней надъ горизонтальнымъ дномъ въ каждомъ изъ сосудовъ, во время t, а h — разность этихъ высотъ.

Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$z - z' = h,\ \partial z - \partial z' = \partial h \quad \text{и} \quad a\sqrt{2gh}\,.\,\partial t = A'\partial z' = -A\partial z.$$

Исключая изъ уравненій

$$\partial z - \partial z' = \partial h \quad \text{и} \quad A\partial z + A'\partial z' = 0$$

количество ∂z, найдемъ:

$$\partial z' = -\frac{A}{A+A'}\partial h$$

поэтому

$$a\sqrt{2gh}\,.\,\partial t = -\frac{AA'}{A+A'}\partial h \quad \text{или} \quad a\sqrt{2g}\,.\,\partial t = -\frac{AA'}{A+A'}\cdot\frac{\partial h}{\sqrt{h}}.$$

Откуда, обозначая чрезъ H значеніе разности h уровней во время $t=0$, получимъ:

$$a\sqrt{2g}\,.\,t = \frac{2AA'}{A+A'}(\sqrt{H}-\sqrt{h}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

время же, нужное для того, чтобы разность высотъ уровней обратилась въ нуль, опредѣляется изъ формулы:

$$a\sqrt{2g} \, . \, t = \frac{2AA'}{A+A'}\sqrt{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Такъ какъ формулы (11) и (12) симметричны относительно A и A', то заключаемъ, что время, опредѣляемое каждою изъ этихъ формулъ, будетъ то же самое, будетъ ли жидкость вытекать изъ широкаго сосуда въ узкій или же обратно.

Если уровень въ одномъ изъ сосудовъ будетъ постояненъ, то площадь поперечнаго сѣченія этого сосуда должно считать безконечно-большою въ сравненіи съ площадью сѣченія второго сосуда, въ которомъ уровень мѣняется. Предполагая, напр., что A' безконечно велико въ сравненіи съ A, получимъ $\frac{AA'}{A+A'} = A$, а потому въ случаѣ истеченія изъ сосуда съ перемѣннымъ уровнемъ въ сосудъ съ постояннымъ уровнемъ, или же обратно, изъ сосуда съ постояннымъ уровнемъ въ сосудъ съ перемѣннымъ уровнемъ, имѣемъ формулу:

$$a\sqrt{2g} \, . \, t = 2A\sqrt{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

въ которой A есть площадь сѣченія сосуда съ перемѣннымъ уровнемъ.

Если опытъ истеченія жидкости изъ одного сосуда въ другой произвести въ двухъ различныхъ мѣстностяхъ, отличающихся напряженіемъ силы тяжести, то времена t и t' истеченія, при равенствѣ прочихъ обстоятельствъ, будутъ очевидно находиться съ ускореніями g и g' этихъ мѣстностей въ слѣдующей зависимости:

$$g : g' = t'^2 : t^2.$$

а потому подобными опытами надъ истеченіемъ жидкости, повидимому, можно пользоваться для опредѣленія напряженія силы тяжести, такъ какъ это дѣлается при помощи опытовъ надъ колебаніемъ маятника или же надъ паденіемъ тѣлъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что выведенныя въ настоящемъ № формулы имѣютъ практическое примѣненіе при изученіи обстоятельствъ наполненія и опорожниванія шлюзовыхъ камеръ. Пользоваться же этими формулами можно только въ случаяхъ, когда отношеніе $\frac{a}{A}$ есть весьма малая дробь.

Случай истеченія изъ отверстія въ боковой стѣнкѣ сосуда.

40. Случай, когда отверстіе сдѣлано въ боковой стѣнкѣ сосуда, отличается отъ разсмотрѣннаго выше случая тѣмъ, что различныя элементарныя струйки, на какія можно мысленно разбить полную струю вытекающей жидкости, обладаютъ различными скоростями, такъ какъ онѣ протекаютъ чрезъ мѣста отверстія, находящіяся на различныхъ глубинахъ подъ свободною поверхностью. Разбивая все отверстіе на безконечно узкія горизонтальныя полоски, обозначая чрезъ y длину одной изъ такихъ полосокъ, чрезъ ∂b ея ширину и чрезъ z глубину ея погруженія подъ свободною поверхностью и, наконецъ, предполагая, что уровень жидкости въ сосудѣ остается постояннымъ, получимъ для объема ∂Q жидкости, протекающей чрезъ эту полоску въ единицу времени, слѣдующее выраженіе:

$$\partial Q = y \partial b \sqrt{2gz}.$$

Если отверстіе сдѣлано въ вертикальной стѣнкѣ, то $\partial b = \partial z$, если же плоскость отверстія наклонена къ горизонту подъ угломъ α, то $\partial b = \frac{\partial z}{\sin\alpha}$; поэтому для полнаго расхода Q имѣемъ формулу:

$$Q = \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \int y \sqrt{z} \,.\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

въ которой можно будетъ совершить указанное интегрированіе тогда только, когда будетъ извѣстна форма отверстія.

Для примѣра положимъ, что имѣется прямоугольное отверстіе, верхнее и нижнее ребра котораго горизонтальны и находятся первое на глубинѣ z_1, а второе на глубинѣ z_2 подъ свободною поверхностью; тогда, обозначая чрезъ l и b ширину и высоту отверстія, получимъ:

$$Q = \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \,.\, l \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{z} \,.\, dz = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} l (z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}})$$

или, такъ какъ $z_2 - z_1 = b \sin\alpha$,

$$Q = \frac{2}{3} l \,.\, b \,.\, \sqrt{2g}\, \frac{z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}}}{z_2 - z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Въ этой послѣдней формулѣ, имѣющей мѣсто при всякомъ наклоненіи плоскости отверстія къ горизонту, можно произведеніе lb, какъ площадь отверстія, замѣнить одною буквою a, согласно предъидущему обозначенію.

Въ случаѣ, когда разность $z_2 - z_1$ будетъ не велика въ сравненіи съ глубиною погруженія отверстія подъ свободною поверхностью, послѣднюю формулу можно упростить.

Пусть h будетъ глубина погруженія центра тяжести отверстія, тогда принимая $\frac{z_2 - z_1}{2h} = \delta$ и имѣя въ виду, что $z_2 + z_1 = 2h$, получимъ:

$$z_2 = \frac{z_2 + z_1}{2} + \frac{z_2 - z_1}{2} = h(1 + \delta)$$

$$z_1 = \frac{z_2 + z_1}{2} - \frac{z_2 - z_1}{2} = h(1 - \delta)$$

а потому

$$Q = a\sqrt{2gh} \,.\, \frac{(1+\delta)^{\frac{3}{2}} - (1-\delta)^{\frac{3}{2}}}{3\delta}.$$

Если δ будетъ незначительною правильною дробью, то каждое изъ количествъ $(1+\delta)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-\delta)^{\frac{3}{2}}$ можно будетъ разложить въ рядъ по степенямъ δ и ограничиться только нѣсколькими первыми членами разложенія. Такъ, напр., продолжая разложеніе до четвертыхъ степеней δ включительно, получимъ:

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{3}{2}} - (1-\delta)^{\frac{3}{2}}}{3\delta} = 1 - \frac{\delta^2}{24}$$

а слѣдовательно

$$Q = a\sqrt{2gh} \,.\, \left(1 - \frac{(z_2 - z_1)^2}{96h^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

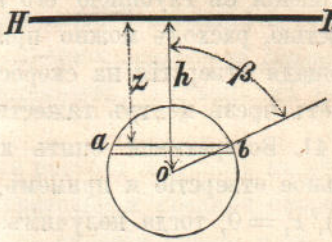
Въ этой послѣдней формулѣ количество, стоящее въ скобкѣ, даже при $z_2 - z_1$ равномъ h, т.-е. при $\delta = \frac{1}{2}$, будетъ отличаться отъ единицы только на $\frac{1}{96}$, поэтому если отверстіе находится не особенно близко къ свободной поверхности, всегда можно вмѣсто формулы (16) взять слѣдующую:

$$Q = a\sqrt{2gh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

получающуюся изъ теоретически точной формулы чрезъ разложеніе количествъ $(1+\delta)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-\delta)^{\frac{3}{2}}$ въ ряды до вторыхъ степеней δ включительно.

Для второго примѣра положимъ, что жидкость вытекаетъ чрезъ круглое отверстіе, сдѣланное въ вертикальной стѣнкѣ сосуда (фиг 11). Въ этомъ случаѣ за ширину y одной изъ горизонтальныхъ полосокъ, на которыя разбиваемъ отверстіе, можно взять длину хорды ab, стягивающей дугу, соотвѣтствующую углу при центрѣ круга, равному 2β. Слѣдовательно, будемъ имѣть:

Фиг. 11.



$$y = 2r\sin\beta \quad \text{и} \quad h = z + r\cos\beta,$$

гдѣ r есть радіусъ отверстія. Послѣднее изъ этихъ уравненій даетъ $\partial z = r\sin\beta \,.\, \partial\beta$; поэтому уравненіе

$$\partial Q = y\partial z\sqrt{2gz}$$

приметъ видъ:

$$\partial Q = \sqrt{2g} \,.\, 2r^2\sin^2\beta\sqrt{h - r\cos\beta} \;.\; \partial\beta$$

а слѣдовательно

$$Q = 2r^2\sqrt{2gh}\int_0^\pi \sin^2\beta\sqrt{1 - \frac{r}{h}\cos\beta} \,.\, \partial\beta.$$

Но для небольшихъ значеній дроби $\frac{r}{h}$ можно принять:

$$\sqrt{1 - \frac{r}{h}\cos\beta} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r}{h}\cos\beta - \frac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cos^2\beta$$

и

$$Q = 2r^2\sqrt{2gh}\left[\int_0^\pi \sin^2\beta \,.\, \partial\beta - \frac{1}{2}\frac{r}{h}\int_0^\pi \sin^2\beta \,.\, \cos\beta \,.\, \partial\beta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^\pi \sin^2\beta \,.\, \cos^2\beta \,.\, \partial\beta\right];$$

а такъ какъ

$$\int_0^\pi \sin^2\beta \cdot \partial\beta = \frac{\pi}{2}, \int_0^\pi \sin^2\beta \,.\, \cos\beta \,.\, \partial\beta = 0 \text{ и } \int_0^\pi \sin^2\beta \,.\, \cos^2\beta \,.\, \partial\beta = \frac{\pi}{8},$$

то $$Q = a\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right), \text{ гдѣ } a = \pi r^2.$$

Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ, какъ и въ предъидущемъ, при сколько нибудь значительной глубинѣ погруженія центра отверстія подъ свободною поверхностью, можно для расхода принять формулу (17). Вообще, какова бы ни была форма отверстія, если только вертикальные размѣры его не велики въ сравненіи съ глубиною его погруженія подъ свободною поверхностью, расходъ можно принимать равнымъ произведенію изъ площади отверстія на скорость той струйки жидкости, которая течетъ чрезъ центръ тяжести отверстія.

41. Возвратимся опять къ случаю истеченія чрезъ прямоугольное отверстіе и примемъ, въ теоретически точной формулѣ (15), $z_1 = 0$, тогда получимъ:

$$Q = \frac{2}{3}\, lb\sqrt{2gz_2} = \frac{2}{3}\, a\sqrt{2gz_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Эта послѣдняя формула опредѣляетъ расходъ въ случаѣ истеченія чрезъ такъ-называемый *водосливъ*. Количество $\sqrt{2gz_2}$ представляетъ скорость струекъ, протекающихъ близъ нижняго ребра, или *порога*, водослива; высота b отверстія въ настоящемъ случаѣ равна z_2.

Сравненіе теоретическихъ выводовъ съ результатами опытовъ; коэффиціенты скорости, сжатія и расхода.

42. Опредѣляя помощью опытовъ скорость истеченія и расходъ жидкости въ различныхъ частныхъ случаяхъ и сравнивая полученные результаты съ теоретическими выводами, мы замѣтимъ бóльшее или меньшее уклоненіе первыхъ отъ сихъ послѣднихъ. Такое несогласіе теоріи съ опытомъ происходитъ отъ того, что при выводѣ формулъ не были приняты во вни-

каніе гидравлическія сопротивленія, рождающіяся вь массѣ движущейся жидкости и въ особенности потому, что многія струйки, въ моментъ прохожденія ихъ чрезъ отверстіе, не сохраняютъ, какъ это предполагалось при опредѣленіи расхода, направленія перпендикулярнаго къ плоскости отверстія. Уклоненіе струекъ отъ указаннаго направленія производитъ то, что частицы жидкости сталкиваются между собою въ моментъ прохожденія ихъ чрезъ отверстіе, а отъ этого происходитъ особое явленіе, замѣченное въ первый разъ *Ньютономъ*, называемое *сжатіемъ струи*. Явленіе это состоитъ въ томъ, что струя по выходѣ изъ отверстія постепенно съуживается такъ, что на нѣкоторомъ разстояніи отъ него, впрочемъ не большомъ, площадь ея поперечнаго сѣченія достигаетъ своего наименьшаго значенія и только чрезъ это послѣднее сѣченіе, называемое *сжатымъ сѣченіемъ струи*, всѣ струйки жидкости протекаютъ, сохраняя къ нему перпендикулярное направленіе.

Пусть Q' будетъ дѣйствительный расходъ жидкости въ нѣкоторомъ случаѣ истеченія, v' — дѣйствительная средняя скорость и a' — площадь поперечнаго сжатаго сѣченія струи; тогда для расхода Q' получимъ выраженіе:

$$Q' = a'v',$$

между тѣмъ какъ для теоретическаго расхода Q мы имѣли $Q = av$, гдѣ a площадь отверстія и v средняя теоретическая скорость истеченія.

Слѣдовательно $$\frac{Q'}{Q} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{v'}{v}$$

или, принимая $$\frac{Q'}{Q} = \mu, \ \frac{a'}{a} = \alpha \ \text{ и } \ \frac{v'}{v} = \varphi \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

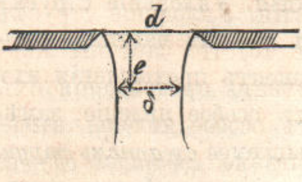
будемъ имѣть $$\mu = \alpha\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Отношенія μ, α и φ, изъ коихъ каждое не болѣе единицы, называются: первое *коэффиціентомъ расхода*, второе *коэффиціентомъ сжатія* и третье *коэффиціентомъ скорости*.

Мы переходимъ теперь къ указанію численнаго значенія этихъ коэффиціентовъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ.

43. *Случай отверстія въ тонкой стѣнкѣ.*

Ньютонъ, первый открывшій явленіе сжатія струи, первый же приступилъ и къ опредѣленію, помощью непосредственныхъ измѣреній, коэффиціента сжатія. Производя опыты истеченія изъ круглаго отверстія (въ 1714 г.), сдѣланнаго въ тонкой стѣнкѣ, онъ нашелъ, что діаметръ d (фиг. 12) отверстія, діаметръ δ сжатаго сѣченія и разстояніе e сего послѣдняго сѣченія отъ отверстія находятся въ слѣдующемъ отношеніи:



Фиг. 12.

$$d : \delta : e = 25 : 21 : 20,$$

а потому по Ньютону

$$\alpha = \left(\frac{21}{25}\right)^2 = 0{,}706.$$

Впослѣдствіи болѣе точные опыты *Борда, Эйтельвейна, Вейсбаха* и друг., показали, что измѣренія Ньютона нѣсколько уклоняются отъ истины. Изъ этихъ послѣднихъ опытовъ, какъ средняя данность, получается для круглаго отверстія въ тонкой стѣнкѣ

$$d : \delta : e = 10 : 8 : 5$$

слѣдоват. $$\alpha = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0{,}64.$$

Затѣмъ, непосредственныя измѣренія вытекающаго объема, сдѣланныя *Полени* еще въ 1715 г., доставили для коэффиціента μ расхода число, согласное съ опытами всѣхъ послѣдующихъ гидравликовъ, а именно:

$$\mu = 0{,}6216.$$

Поэтому коэффиціентъ φ въ разсматриваемомъ случаѣ долженъ опредѣляться равенствомъ:

$$\varphi = \frac{0{,}6216}{0{,}64} = 0{,}97$$

Такимъ образомъ въ случаѣ истеченія изъ круглаго отверстія въ тонкой стѣнкѣ должно принять:

$$\varphi = 0{,}97,\ \alpha = 0{,}64 \ \text{ и } \ \mu = 0{,}62 \quad . \ . \ . \ . \quad (21)$$

Коэффиціенты эти нельзя однако разсматривать какъ совершенно постоянныя количества. Изъ опытовъ Вейсбаха *) слѣдуетъ, что коэффиціентъ расхода, имѣющій самое важное значеніе въ приложеніяхъ, слабо возростаетъ съ уменьшеніемъ діаметра отверстія и съ уменьшеніемъ напора. Такъ, напримѣръ,

при	$d = 4$;	3;	2;	1;	сантиметовъ.
	$\mu = 0{,}607$;	0,614;	0,621;	0,628	при $h = 0{,}6$ метр.
и	$\mu = 0{,}614$;	0,622;	0,629;	0,637	при $h = 0{,}25$ метр.

Опыты истеченія чрезъ прямоугольныя отверстія были произведены въ обширныхъ размѣрахъ въ Мецѣ въ 1828 и 1829 гг. *Понселе* и *Лебро* **) и затѣмъ однимъ *Лебро* ***) съ 1829 по 1834 гг. При этихъ опытахъ обнаружилось, между прочимъ, любопытное явленіе, до сихъ поръ необъясненное удовлетворительно теоріею, состоящее въ *крученіи и извращеніи струи*. Такъ, напр., при квадратномъ отверстіи сѣченіе струи, на разстояніи отъ отверстія равномъ 0,15 метровъ, представляетъ форму почти квадратную же, но стороны этого квадрата составляютъ съ сторонами отверстія углы въ 45°, на разстояніи же равномъ 0,3 метра сѣченіе струи имѣетъ уже форму восьміугольника съ слабо вогнутыми сторонами. Такое измѣненіе формы поперечнаго сѣченія струи значительно затрудняетъ опредѣленіе положенія и площади сжатаго сѣченія, а слѣдов. и численныя значенія коэффиціентовъ сжатія въ случаѣ прямоугольныхъ отверстій, полученные непосредственными измѣреніями струи, заслуживаютъ меньшаго довѣрія, нежели значенія, выведенныя при опытахъ истеченія изъ круглыхъ отверстій. Что же касается коэффиціентовъ расхода, то изъ опытовъ *Понселе* и *Лебро* оказалось, что среднее значеніе его для прямоугольныхъ, какъ и для круглыхъ, отверстій можетъ быть принимаемо равнымъ 0,62.

*) Die Experimental-Hydraulique. Freiberg, 1855.

**) Poncelet et Lesbros. Expèriences hydrauliques etc. Paris, 1832.

***) Lesbros. Fxpériences hydrauliques etc. Paris, 1851.

Ниже помѣщаемая таблица составляетъ извлеченіе изъ обширныхъ таблицъ *Понселе* и *Лебро*.

Таблица коэффиціентовъ расхода для прямоугольныхъ отверстій въ тонкой вертикальной стѣнкѣ въ случаѣ истеченія въ воздухъ.

Метр.	0,02	0,10	0,20	0,50	1,00	1,50	1,80	2,00	3,00
0,02	0,664	0,654	0,648	0,640	0,633	0,619	0,614	0,612	0,610
	0,659	„	„	„	„	„	„	„	„
0,03	0,644	0,638	0,633	0,630	0,628	0,620	0,615	0,612	0,608
	0,639	0,637	„	„	„	„	„	„	„
0,05	0,624	0,631	0,630	0,628	0,626	0,620	0,615	0,613	0,606
	0,615	0,630	„	„	„	„	„	„	„
0,10	0,611	0,615	0,617	0,617	0,615	0,611	0,609	0,607	0,603
	0,596	0,611	0,615	„	„	„	„	„	„
0,20	0,592	0,599	0,601	0,604	0,605	0,603	0,602	0,601	0,601
	0,572	0,592	0,598	0,603	„	„	„	„	„

Въ таблицѣ этой, въ первомъ горизонтальномъ столбцѣ, помѣщены значенія напора въ метрахъ, считаемаго отъ уровня воды до верхняго ребра отверстія, а въ первомъ вертикальномъ столбцѣ—значенія высоты отверстія въ метрахъ же. (Ширина отверстія при опытахъ постоянно равнялась 0,2 метровъ). Противъ каждой высоты напора и высоты отверстія въ таблицѣ этой помѣщено два значенія для коэффиціента μ, изъ коихъ верхній имѣетъ мѣсто для точной формулы

$$Q = \frac{2}{3}\mu l \sqrt{2g}\,(z_2^{\frac{3}{2}} - z_2^{\frac{3}{2}}),$$

а нижній для приближенной формулы

$$Q = \mu a\sqrt{2gh} = \mu l(z_2 - z_2)\sqrt{2g\,\frac{z_2 + z_1}{2}}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда для этой послѣдней формулы коэффиціентъ μ тотъ же, что и для первой, въ таблицѣ поставленъ знакъ („).

Для уясненія употребленія этой таблицы опредѣлимъ расходъ воды при ширинѣ отверстія въ 0,4 метра и высотѣ въ 0,1 метра, верхнее ребро котораго погружено подъ свободною поверхностью на 0,2 метра. При такихъ данныхъ будемъ имѣть:

$$l = 0{,}4; \quad z_2 - z_1 = 0{,}1; \quad z_1 = 0{,}2; \quad \text{слѣдовательно,} \quad z_2 = 0{,}3$$

$$\text{и} \quad \frac{z_2 + z_1}{2} = 0{,}25.$$

Принимая же ускореніе силы тяжести равнымъ 9,81 метровъ, получимъ изъ теоретически точной формулы:

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\,.\,0{,}4\sqrt{2\,.\,9{,}81}\,.\,(0{,}3^{\frac{3}{2}} - 0{,}2^{\frac{3}{2}}) = \mu\,.\,0{,}08842 \text{ куб. метр.}$$

а изъ приближенной

$$Q = \mu\,.\,0{,}4\sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,0{,}25} = \mu\,.\,0{,}08858 \text{ куб. метр.}$$

Изъ таблицъ же для первой формулы имѣемъ $\mu = 0{,}617$, а для второй — 0,615, поэтому расходъ по первой формулѣ будетъ равенъ

$$0{,}617\,.\,0{,}08842 = 0{,}05455 \text{ куб. метр.}$$

а по приближенной будетъ

$$0{,}615\,.\,0{,}0858 = 0.05448 \text{ куб. метр.}$$

44. Навье былъ первымъ, который старался опредѣлить коэффиціентъ сжатія вычисленіемъ. Для этого онъ сдѣлалъ предположеніе, что скорости всѣхъ элементарныхъ струекъ, текущихъ чрезъ отверстіе, сдѣланное въ тонкомъ, плоскомъ и горизонтальномъ днѣ сосуда, одинаковы по величинѣ, но различны по направленію. Уголъ δ, образуемый направленіемъ элементарной струйки съ направленіемъ нормали къ плоскости отверстія, мѣняется для различныхъ струекъ въ предѣлахъ отъ 0 до 90°. Онъ равенъ этому верхнему предѣлу для всѣхъ тѣхъ частицъ жидкости, которыя, приближаясь къ отверстію, движутся по дну сосуда. Если чрезъ ∂a назовемъ элементъ площади отверстія, то расходъ жидкости, протекающей чрезъ этотъ эле-

ментъ, будетъ равенъ $da \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos\delta$, а слѣдовательно, полный расходъ Q будетъ

$$Q = \sqrt{2gh} \cdot \int \cos\delta \cdot da,$$

гдѣ интегрированіе должно распространить на всю площадь отверстія. Интегралъ, вошедшій въ послѣднее выраженіе, Навье опредѣлилъ, замѣнивъ въ немъ $\cos\delta$ его среднимъ значеніемъ. Среднее же значеніе функціи $\cos\delta$, у которой перемѣнная независимая δ мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до 90°, онъ опредѣлялъ такъ:

$$\textit{Средн.}\ (\cos\delta) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\delta \cdot d\delta = \frac{2}{\pi} (\sin\delta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 0{,}63662.$$

Слѣдоват., для опредѣленія расхода получается формула

$$Q = 0{,}63662 a \sqrt{2gh}.$$

Въ формулѣ этой дробь 0,63662 представляетъ собственно коэффиціентъ сжатія, поэтому для коэффиціента расхода μ получаемъ:

$$\mu = 0{,}97 \times 0{,}63662 = 0{,}61752.$$

Числа эти очень близки къ найденнымъ изъ опытовъ. Несмотря однако на это обстоятельство, указанный методъ Навье для опредѣленія коэффиціента сжатія нельзя считать правильнымъ, такъ какъ онъ приводитъ къ значенію, независящему отъ формы контура отверстія; между тѣмъ какъ, очевидно, среднее значеніе $\cos\delta$ зависитъ не только отъ того, въ какихъ предѣлахъ мѣняется уголъ δ, но и отъ закона распредѣленія численныхъ значеній этого угла въ различныхъ точкахъ площади отверстія. При двухъ отверстіяхъ одинаковой площади, но не одинаковаго периметра, коэффиціентъ сжатія долженъ имѣть различныя значенія: онъ долженъ быть меньше для отверстія съ большимъ периметромъ и обратно.

Гельмгольцъ *) первый указалъ на возможность опредѣленія, въ одномъ частномъ случаѣ, формы струи свободно-движущейся

*) Monatsberichte der Berliner Academie. April, 1868.

жидкости путемъ чисто теоретическихъ соображеній, а за нимъ *Кирхгоффъ* *) примѣнилъ анализъ къ нѣкоторымъ другимъ частнымъ случаямъ. Наконецъ *Буссинекъ* **), на основаніи теоріи потенціала, вывелъ значенія коэффиціента расхода для прямоугольныхъ и круглыхъ отверстій. Коэффиціентъ этотъ для прямоугольныхъ отверстій (сильно растянутыхъ), по Буссинеку, равенъ 0,6283, а для круглыхъ 0,6566.

Мы не можемъ входить здѣсь въ разсмотрѣніе теоретическихъ соображеній, которыми пользовались Гельмгольцъ, Кирхгоффъ и Буссинекъ, но замѣтимъ только, относительно сего послѣдняго, что его анализъ основанъ на предположеніи, что площадь отверстія состоитъ какъ бы изъ безконечно тонкаго слоя массы, притягивающей къ себѣ частицы жидкости, находящіяся въ сосудѣ, по закону Ньютона, т.-е. обратно пропорціонально квадратамъ разстояній. Масса этого слоя въ различныхъ точкахъ площади отверстія предполагается различною, а именно: пропорціональною нормальной скорости, соотвѣтствующей этимъ точкамъ. Поэтому анализъ Буссинека приводитъ къ познанію нетолько коэффиціента сжатія, но и закона распредѣленія нормальныхъ скоростей въ точкахъ отверстія.

45. *Случай отверстія въ толстой стѣнкѣ.*

Случай отверстія, сдѣланнаго въ толстой стѣнкѣ, тождественъ со случаемъ, когда къ отверстію въ тонкой стѣнкѣ присоединена нѣкоторой длины призматическая или цилиндрическая трубочка, обращенная во внѣшнее пространство, по отношенію къ вмѣстимости сосуда. Въ этомъ случаѣ жидкость, какъ и въ случаѣ истеченія чрезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, входя во внутрь трубочки, сначала сжимается, но послѣ опять пристаетъ къ стѣнкамъ трубочки, если длина сей послѣдней не менѣе 1,5 разъ взятаго ея діаметра, и вытекаетъ изъ оконечности *полнымъ отверстіемъ*, т.-е. не подвергаясь вторичному сжатію. Слѣдов., для разсматриваемаго случая должно принять:

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \varphi = \mu.$$

*) Borchardt's Journal. Bd. 70. 1869; или его Vorlesungen über Mathematische Physik. Leipzig. 1876.

**) *M. Boussinesq.* Essai sur la théorie des eaux courantes.

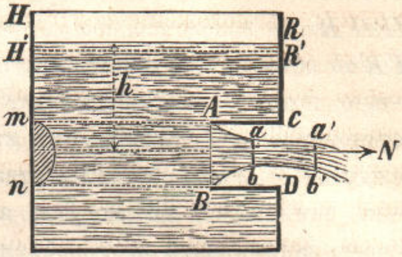
Но, опредѣляя въ этомъ случаѣ коэффиціентъ расхода μ опытомъ, оказывается, что онъ равняется не 0,62, какъ въ случаѣ отверстія въ тонкой стѣнкѣ, но 0,815, а потому для отверстія въ толстой стѣнкѣ имѣемъ:

$$\alpha = 1,\ \mu = \varphi = 0{,}815 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Изъ сравненія этихъ значеній съ значеніями, соотвѣтствующими отверстію въ тонкой стѣнкѣ, видимъ, что присоединеніе къ отверстію трубочки, длиною около 1,5 діаметра, *увеличиваетъ расходъ* въ $\frac{815}{620} = 1{,}314$ разъ, то-есть болѣе чѣмъ на 30%, хотя въ то же время *уменьшаетъ скорость* истеченія въ $\frac{970}{815} = 1{,}19$ разъ. Такъ какъ живая сила движущейся жидкости пропорціональна расходу и квадрату скорости, то присоединеніе указанной трубочки *уменьшаетъ живую силу* въ $\frac{1{,}19^2}{1{,}314} = 1{,}084$ раза, то-есть почти на $8{,}5\%$. Изъ этого слѣдуетъ, что если вытеканіемъ струи желаемъ пользоваться для сообщенія движенія какому-либо гидравлическому пріемнику, то лучше пускать воду на пріемникъ чрезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ; если же желаемъ по возможности скорѣе опорожнить сосудъ, то отверстіе должно дѣлать въ толстой стѣнкѣ. Впослѣдствіи будетъ сказано еще нѣсколько словъ объ этомъ случаѣ истеченія.

46. *Случай прибавочной трубочки, входящей во внутрь сосуда.* Въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ предъидущемъ нумерѣ, коэффиціентъ α равнялся единицѣ, т.-е. достигалъ своего *наибольшаго значенія;* въ случаѣ же, къ разсмотрѣнію котораго мы теперь переходимъ, коэффиціентъ этотъ достигаетъ своего *наименьшаго значенія*, причемъ это послѣднее значеніе оказывается возможнымъ опредѣлить путемъ чисто теоретическихъ соображеній, какъ это показалъ *Борда*.

Пусть HR (фиг. 13) представляетъ постоянный уровень жидкости въ сосудѣ, изъ котораго вытекаетъ жидкость чрезъ прибавочную трубочку $ABCD$, ось которой N, какъ это предполагается для большей простоты выводовъ, горизонтальна. Поперечное сѣченіе трубочки предполагается весьма малымъ въ сравненіи съ сѣченіями сосуда. Чтобы дѣйствительно получился тотъ случай истеченія, на который мы желаемъ обратить вниманіе, длина трубочки должна быть близка къ діаметру. При такой длинѣ, струя выйдетъ изъ оконечности CD въ сжатомъ видѣ, т.-е. не успѣвъ пристать къ стѣнкамъ, но въ то же время сѣченіе AB трубочки будетъ находится на столько значительномъ разстояніи отъ стѣнки сосуда, что частицы жидкости, близко лежащія къ стѣнкѣ, не будутъ имѣть чувствительныхъ скоростей, а потому, при опредѣленіи давленія стѣнокъ на жидкость, можно будетъ пользоваться законами гидростатики.



Фиг. 13.

Пусть ab будетъ сжатое сѣченіе струи, a' — его площадь, v — скорость истеченія изъ него и a — площадь сѣченія трубочки. Въ элементъ времени dt объемъ, заключающійся между сѣченіями HR и ab, займетъ новое положеніе $H'R'a'b'$, въ которомъ масса этого объема будетъ обладать и живою силою, и количествомъ движенія, отличными отъ живой силы и количества движенія этой массы въ положеніи $HRab$. Поэтому, примѣняя къ указанному перемѣщенію массы $HRab$ начало живыхъ силъ и начало количествъ движенія, можно будетъ опредѣлить какъ скорость v, такъ и коэффиціентъ сжатія α.

Начало живыхъ силъ даетъ знакомое уже намъ выраженіе:

$$\frac{v^2 - V^2}{2g} = h + \frac{P - p}{\Delta},$$

въ которомъ V есть скорость въ сѣченіи HR, h — глубина погруженія подъ свободною поверхностью центра сѣченія AB, P — давленіе на единицѣ свободной поверхности и p — подобное же давленіе на поверхности вытекающей струи. Пренебрегая же членомъ $\frac{V^2}{2g}$ предъ $\frac{v^2}{2g}$, т.-е. вводя условіе, что сѣченіе сосуда весьма велико въ сравненіи съ сѣченіемъ струи, получимъ, вмѣсто послѣдней формулы, слѣдующую:

$$v^2 = 2g\left(h + \frac{P - p}{\Delta}\right).$$

Чтобы примѣнить второе начало, изберемъ за ось проекцій ось трубочки и замѣтимъ, что, вмѣсто перемѣщенія объема $HRab$ въ положеніе $H'R'a'b'$, можно разсматривать перемѣщеніе объема $HRH'R'$ въ положеніе $aba'b'$, предполагая при томъ, что объемъ $H'R'ab$ оставался неподвижнымъ. Такое предположеніе позволительно потому, что разсматриваемое движеніе есть движеніе установившееся, слѣдоват., въ каждой точкѣ объема, лежащаго между $H'R'$ и ab, обстоятельства движенія съ теченіемъ времени измѣняться не могутъ, а потому количество движенія массы, занимающей этотъ объемъ въ концѣ промежутка времени dt, равно количеству движенія той массы, какая занимала этотъ же объемъ при началѣ промежутка dt. При такомъ предположеніи, для опредѣленія приращенія количества движенія, спроектированнаго на ось трубочки, придется взять количество движенія массы $aba'b'$, количество же движенія массы $HRH'R'$ совершенно не должно принимать во вниманіе, во-первыхъ потому, что скорость движенія ея весьма мала, а во-вторыхъ потому, что направленіе ея движенія чувствительно перпендикулярно къ оси проекцій. Но масса объема $aba'b'$ равна $\frac{\Delta}{g}\ a'vdt$, а потому, для приращенія количества движенія, спроектированнаго на ось трубочки, имѣемъ выраженіе $\frac{\Delta a'vdt}{g}.v$. Приращеніе это должно прировнять суммѣ импульсовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, спроектированныхъ на ту же ось. Внѣшнія же силы въ отношеніи къ массѣ $HRab$ суть слѣдующія: 1) вѣсъ этой массы, 2) давленіе на поверхности HR, 3) давленіе на свободную кривую поверхность $ABba$ струи, 4) давленіе на сѣченіе ab струи и 5) давленіе отъ стѣнокъ. Импульсы первой и второй изъ указанныхъ силъ, какъ перпендикулярныхъ къ оси проекцій, не войдутъ въ искомое уравненіе. Для опредѣленія импульсовъ третьей и четвертой силы замѣтимъ, что давленіе на сѣченіе ab и давленіе p на кривую поверхность струи должно считать равными, такъ какъ струя, по выходѣ изъ отверстія, движется въ воздухѣ *свободно*, т.-е. имѣетъ параболическое движеніе, какое имѣла бы каждая частица жидкости двигаясь отдѣльно. Но давленіе на сѣченіе ab вмѣстѣ съ давленіемъ на кривую поверхность $ABba$ приводится къ давленію p, распространенному на всю площадь сѣченія AB, т.-е. къ силѣ $-ap$, импульсъ которой равенъ $-apdt$. Наконецъ, для опредѣленія импульса пятой силы, разложимъ давленіе каждаго элемента стѣнки на жидкость на вертикальное и горизонтальное и отбросимъ всѣ вертикальныя составляющія, какъ перпендикулярныя къ оси проекцій. Еслибы сѣченіе AB трубочки было замѣнено стѣнкою и жидкость въ сосудѣ была бы въ покоѣ, то всѣ горизонтальныя составляющія давленія отъ стѣнокъ на жидкость взаимно уравновѣшивались бы. Въ разсматриваемомъ же случаѣ, когда сѣченіе AB есть отверстіе, изъ котораго вытекаетъ жидкость, обстоятельства нѣсколько измѣняются. Частицы жидкости, находящіяся въ сѣченіи AB, не подвергаются давленію отъ стѣнокъ, поэтому горизонтальныя давленія, по условію распредѣленныя по законамъ гидростатики (вслѣдствіе ничтожно малыхъ скоростей частицъ, прилежащихъ къ стѣнкамъ), будутъ, какъ и въ случаѣ равновѣсія, взаимно уравновѣшиваться за исключеніемъ давленія, дѣйствующаго на ту часть mn стѣнки, которая противулежитъ отверстію AB трубочки. Проекція же этого послѣдняго давленія на ось трубочки равна $(P+\Delta h)a$; поэтому, искомый импульсъ пятой силы равенъ $(P+\Delta h)adt$. Слѣдов., имѣемъ уравненіе

$$\frac{\Delta a'v}{g}\cdot v = -ap + (P+\Delta h)a,$$

или

$$v^2 = \frac{a}{a'}\, g\left(\frac{P-p}{\Delta}\right).$$

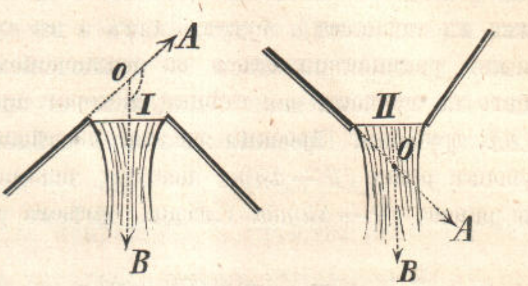
Сравнивая же это выраженіе съ выше найденнымъ выраженіемъ для v^2, получаемъ

$$\frac{a}{a'} = 2, \quad \text{или} \quad \frac{a'}{a} = \alpha = 0{,}50 \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (23)$$

Этотъ послѣдній результатъ теоріи подтверждается и опытомъ.

47. *Случай сжатія промежуточнаго между наибольшимъ и наименьшимъ.*

Изъ всего вышесказаннаго не трудно усмотрѣть, что явленіе сжатія струи есть слѣдствіе необходимости, для множества частицъ жидкости, измѣнять направленіе своего движенія въ моментъ прохожденія ихъ чрезъ отверстіе. Наибольшему измѣненію направленія движенія подвергаются частицы, движущіяся вдоль той стѣнки, въ которой сдѣлано отверстіе. Въ случаѣ истеченія чрезъ отверстіе, снабженное входящею во внутрь сосуда трубочкою, разсмотрѣнномъ въ предъидущемъ нумерѣ, такое наибольшее уклоненіе въ направленіи движенія было въ 180°; въ случаѣ отверстія въ тонкой плоской стѣнкѣ оно равно углу въ 90° и, наконецъ, въ случаѣ отверстія, снабженнаго наружною трубочкою, оно равно углу въ 0°. Понятно, что можно придать стѣнкѣ, въ которой сдѣлано отверстіе, такую форму, что наибольшее уклоненіе будетъ соотвѣтствовать углу промежуточному между 180° и 90°, или же между 90° и 0°, а тогда и коэффиціентъ α долженъ имѣть промежуточныя значенія между 0,50 и 0,64, или же между 0,64 и 1. Такъ, напр., для отверстія I



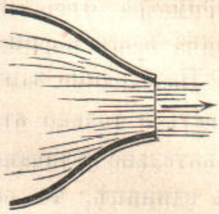
Фиг. 14.

(фиг. 14), сдѣланнаго въ коническомъ днѣ (когда вершина конуса лежитъ внутри сосуда), направленіе крайней струйки OA и направленіе OB оси отверстія, составляютъ тупой уголъ; для отверстія II, сдѣланнаго тоже въ коническомъ днѣ (когда вершина конуса лежитъ внѣ сосуда), уголъ между OA и OB острый; слѣдов., для перваго изъ этихъ отверстій коэффиціентъ сжатія долженъ лежать между 0,50 и 0,64, а для второго—между 0,64 и 1. Вообще, называя чрезъ γ уголъ AOB, должно α разсматривать какъ убывающую функцію угла γ.

Ниже помѣщаемая таблица содержитъ значенія коэффиціента расхода μ, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ угла γ. Таблица эта составлена *Вейсбахомъ* на основаніи его собственныхъ опытовъ и помѣщена въ первомъ томѣ его механики.

$$\gamma = 180° \quad 157\tfrac{1}{2}; \quad 135; \quad 112\tfrac{1}{2}; \quad 90°; \quad 67\tfrac{1}{2}; \quad 45;$$
$$\mu = 0{,}541; \; 0{,}546; \; 0{,}577; \; 0{,}606; \; 0{,}632; \; 0{,}684; \; 0{,}753;$$
$$\gamma = 22\tfrac{1}{2}; \quad 11\tfrac{1}{4}; \quad 5\tfrac{3}{4}; \quad 0°$$
$$\mu = 0{,}882; \; 0{,}924; \; 0{,}949; \; 0{,}966.$$

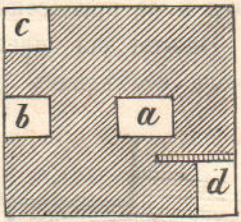
Примѣчаніе. При опытахъ своихъ *Вейсбахъ* приближалъ уголъ γ къ нулю, придавая стѣнкѣ сосуда, въ которой сдѣлано отверстіе, форму все ближе и ближе подходящую къ той, какую имѣетъ сжатая струя, выходящая изъ отверстія въ тонкой плоской стѣнкѣ, такъ что случай, когда $\gamma = 0°$, соотвѣтствовалъ формѣ, указанной на фигурѣ 15; поэтому-то значеніе коэффиціента μ, для этого послѣдняго случая, помѣщенное въ таблицѣ, равно 0,966, а не 0,815, какъ бы слѣдовало въ случаѣ прибавочной трубки, выходящей наружу.



Фиг. 15.

48. *Случаи неполнаго сжатія.*

Случаи неполнаго сжатія получаются тогда, когда является препятствіе для частицъ жидкости подходить къ отверстію съ нѣкоторыхъ его сторонъ. Такъ, напр., еслибы въ плоскомъ днѣ сосуда съ вертикальными стѣнками были сдѣланы отверстія a, b, c и d (фиг. 16) въ мѣстахъ, указанныхъ на фигурѣ, то въ отверстіи a получилось бы полное сжатіе, въ отверстіи b не было бы сжатія съ той стороны его, которая прилегаетъ къ стѣнкѣ сосуда, въ отверстіи c не было бы сжатія съ двухъ сторонъ, такъ какъ двѣ стороны этого отверстія прилегаютъ къ стѣнкамъ и наконецъ въ отверстіи d не было бы сжатія съ трехъ сторонъ, такъ какъ отверстіе это прилегаетъ къ двумъ стѣнкамъ сосуда и еще къ пластинкѣ, установленной внутри сосуда. Подобнымъ образомъ отверстіе, сдѣланное въ боковой стѣнкѣ сосуда и опирающееся нижнимъ своимъ ребромъ о дно, доставило бы неполное сжатіе.



Фиг. 16.

Для опредѣленія коэффиціента расхода μ', соотвѣтствующаго случаю неполнаго сжатія, можно пользоваться слѣдующею формулою, выведенною изъ опытовъ *Бидона* и *Вейсбаха*:

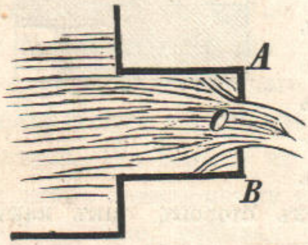
$$\mu' = \mu\left(1 + 0{,}152\,\frac{n'}{n}\right)\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (24)$$

въ которой μ есть коэффиціентъ расхода для даннаго отверстія, соотвѣтствующій случаю полнаго сжатія, n' есть длина той части периметра отверстія, по которой не происходитъ сжатія, а n есть длина всего периметра.

Необходимо замѣтить, что послѣднею формулою можно пользоваться только въ тѣхъ случаяхъ, когда значенія дроби $\frac{n'}{n}$ чувствительно отличаются отъ единицы. Если же это значеніе близко къ единицѣ, то обстоятельства истеченія существенно измѣняются, такъ какъ въ такомъ случаѣ стѣнки, устраняющія сжатіе, будутъ представлять какъ бы прибавочную трубочку, входящую во внутрь сосуда.

49. Если стѣнки, устраняющія сжатіе, будутъ отодвинуты отъ краевъ отверстія, то вліяніе ихъ на значеніе коэффиціентовъ α и μ можетъ, при небольшихъ разстояніяхъ ихъ отъ краевъ, оказаться еще довольно чувствительнымъ. Случаи неполнаго сжатія могутъ, слѣдовательно, проявляться и тогда, когда края отверстія находятся близко къ стѣнкамъ или къ дну сосуда, хотя и не прилегаютъ къ нимъ.

Опыты для опредѣленія практическихъ коэффиціентовъ въ этомъ послѣднемъ случаѣ неполнаго сжатія далеко не обнимаютъ всѣхъ возможныхъ случаевъ расположенія стѣнокъ въ отношеніи къ отверстію; поэтому изъ нихъ трудно вывести какія-либо положительныя заключенія. Мы ограничимся здѣсь указаніемъ на опыты *Вейсбаха* надъ истеченіемъ изъ отверстій, сдѣланныхъ въ плоской тонкой стѣнкѣ, когда площадь этой стѣнки въ извѣстное число разъ превосходитъ площадь отверстія.



Фиг. 17.

Предполагая, что жидкость вытекаетъ изъ отверстія O сосуда, имѣющаго форму, указанную на фиг. 17, назовемъ чрезъ a площадь отверстія O и чрезъ A площадь стѣнки AB, въ которой сдѣлано это отверстіе; тогда, слѣдуя Вейсбаху, будемъ имѣть для различныхъ значеній дроби $\frac{a}{A}$ слѣдующія значенія для отношенія $\frac{\mu'}{\mu}$ коэффиціентовъ расхода:

$$\frac{a}{A} = 0,05;\ \ 0,10;\ \ 0,20;\ \ 0,30;\ \ 0,40;\ \ 0,50;\ \ 0,60;$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \begin{cases} 1,007;\ 1,014;\ 1,034;\ 1,059;\ 1,092;\ 1,134;\ 1,189; \\ 1,009;\ 1,019;\ 1,042;\ 1,071;\ 1,107;\ 1,152;\ 1,208; \end{cases}$$

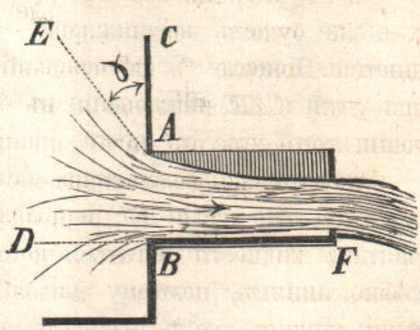
$$\frac{a}{A} = 0,80;\ \ 0,90;\ \ 1,00.$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \begin{cases} 1,351;\ 1,471;\ 1,613. \\ 1,365;\ 1,473;\ 1,608. \end{cases}$$

Въ таблицѣ этой верхнія значенія отношенія $\frac{\mu'}{\mu}$ соотвѣтствуютъ случаю круглаго отверстія, а нижнія—случаю прямоугольнаго отверстія. Въ описаніи указанныхъ выше опытовъ Понселе и Лебро можно найти значенія коэффиціентовъ расхода для нѣкоторыхъ другихъ случаевъ неполнаго сжатія. Весьма обстоятельное изложеніе опытовъ Понселе и Лебро можно найти и въ Гидромеханикѣ *Рюльмана* *).

50. *Случай отверстія, снабженнаго выходящимъ открытымъ русломъ.*

Случай истеченія чрезъ отверстіе, снабженное открытымъ русломъ (фиг. 18), часто встрѣчается въ дѣйствительности, такъ какъ помощью подобнаго русла подводится вода ко многимъ гидравлическимъ пріемникамъ. Ниже помѣщаемая таблица содержитъ значенія коэффиціента расхода μ, полученныя при опытахъ Лебро для этого случая истеченія:



Фиг. 18.

*) Hydromechanik von Dr. M. Rühlmann. Leipzig, 1857.

Метр.	0,02	0,05	0,10	0,20	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00
0,05 {	0,508	0,589	0,628	0,631	0,625	0,624	0,619	0,614	0,606
	0,506	0,581	0,609	0,617	0,626	0,627	0,627	0,623	0,618
0,20 {	0,502	0,520	0,545	0,575	0,600	0,602	0,601	0,601	0,601
	0,501	0,518	0,541	0,566	0,591	0,601	0,602	0,601	0,602

Въ этой таблицѣ въ первомъ горизонтальномъ столбцѣ помѣщены напоры въ метрахъ, считаемые отъ верхняго ребра отверстія до уровня воды въ резервуарѣ; въ первомъ вертикальномъ столбцѣ—высоты отверстія въ метрахъ же. Противъ каждаго значенія высоты отверстія и напора помѣщено два значенія для коэффиціента расхода μ, изъ коихъ верхнее соотвѣтствуетъ случаю, когда дно BF русла находится чувствительно выше дна резервуара, а нижнее значеніе—когда дно резервура и дно русла составляетъ одну плоскость DBF. Оба значенія коэффиціента μ относятся къ формулѣ

$$Q = \mu l(z_2 - z_1)\sqrt{2g\frac{z_2+z_1}{2}}.$$

Ширина l отверстія, или русла, должна быть значительно меньше ширины той стѣнки, въ которой прорѣзано отверстіе.

Въ случаѣ, если боковая стѣнка AC приметъ положеніе AE, т.-е. не будетъ вертикальна,—значенія коэффиціента μ измѣняются. Понселе *), на основаніи своихъ опытовъ, совѣтуетъ, при углѣ CAE наклоненія въ 45°, брать $\mu = 0{,}80$, а при значеніи этого угла въ 26°40′, принимать $\mu = 0{,}75$.

Относительно разсматриваемаго случая истеченія необходимо замѣтить, что русло BF, направляя движеніе струи, заставляетъ частицы жидкости двигаться по прямымъ, параллельнымъ между собою, линіямъ; поэтому давленіе въ точкахъ поперечнаго сѣченія струи въ руслѣ распредѣляется по законамъ гидростатики. Слѣдовательно, скорость движенія струекъ будетъ зависѣть отъ разности уровней воды въ резервурѣ и въ руслѣ, т.-е. скорость

*) Mémoire sur les roues hidrauliques à aubes courbes etc. Metz, 1827.

эта будетъ одинакова для всѣхъ струекъ, а именно та же, что и для самой верхней струйки. Такимъ образомъ, теоретически точная формула для расхода, въ случаѣ отверстія, снабженнаго выходящимъ открытымъ русломъ, есть слѣдующая:

$$Q = \mu l(z_2 - z_1)\sqrt{2gz_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

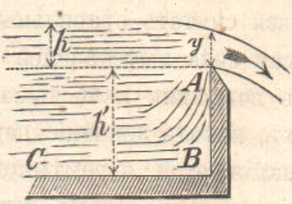
51. *Случай истеченія чрезъ водосливъ.*

Въ № 41 была выведена формула (18) для расхода, въ случаѣ истеченія чрезъ водосливъ, слѣдующаго вида:

$$Q = \tfrac{2}{3} hl\sqrt{2gh} = \tfrac{2}{3} l \,.\, \sqrt{2g} \,.\, h^{\frac{3}{2}},$$

въ которой l есть ширина водослива и h глубина погруженія его порога подъ свободною поверхностью воды въ резервуарѣ. Формула эта, подобно всѣмъ другимъ теоретическимъ формуламъ, требуетъ исправленія нѣкоторымъ практическимъ коэффиціентомъ. Прежде чѣмъ укажемъ на численныя значенія этого коэффиціента, считаемъ необходимымъ обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

При вытеканіи воды чрезъ водосливное отверстіе, сдѣланное въ тонкой стѣнкѣ, сжатіе струи обнаруживается точно такъ же, какъ и при вытеканіи изъ отверстій, имѣющихъ верхнее ребро. Слѣдствіемъ этого сжатія бываетъ то, что уровень воды надъ порогомъ водослива понижается на нѣкоторую высоту, какъ это показано на фиг. 19. Слѣдов., самыя верхнія струйки, въ моментъ прохожденія надъ порогомъ, находятся подъ напоромъ $z_1 = h - y$, если чрезъ y обозначимъ разстояніе ихъ отъ порога водослива, а самыя нижнія — подъ напоромъ $z_2 = h$; поэтому, при опредѣленіи расхода, вмѣсто формулы



Фиг. 19.

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l \sqrt{2g} \,.\, h^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (26)$$

будетъ болѣе правильнымъ брать слѣдующую формулу:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l \sqrt{2g}\,[y^{\frac{3}{2}} - (h-y)^{\frac{3}{2}}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

или же пользоваться слѣдующею приближенною:

$$Q = \mu l(z_2 - z_1)\sqrt{2g\frac{z_2+z_1}{2}} = \mu l y \sqrt{2g(h - \tfrac{1}{2}y)} \quad . \quad . \quad (28)$$

Но въ этихъ послѣднихъ формулахъ высота y не опредѣляется теоріею и ее должно искать изъ опытовъ.

Навье *) дѣлаетъ, впрочемъ, попытку опредѣленія высоты y путемъ теоретическихъ соображеній, допуская предположеніе, что *живая сила вытекающаго объема жидкости есть наибольшая.* Живую же силу онъ опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ: раздѣляетъ вторую часть формулы (27) на площадь ly струи, получаетъ *среднюю скорость* и квадратъ сей послѣдней множитъ на $\frac{\Delta Q}{2g}$. Такимъ образомъ, живая сила выражается чрезъ слѣдующую функцію количества y:

$$\frac{[h^{\frac{3}{2}} - (h-y)^{\frac{3}{2}}]^3}{y^2}.$$

Значеніе y, обращающее эту функцію въ наибольшую, какъ оказывается, равно $0{,}7247h$. Но такой способъ опредѣленія y нельзя считать правильнымъ. Во-первыхъ, предположеніе, что живая сила вытекающей въ единицу времени массы жидкости есть возможно наибольшая, совершенно произвольно, а во-вторыхъ, искать значеніе перемѣнной независимой, при которомъ функція этой перемѣнной достигаетъ своего наибольшаго значенія, можно только тогда, когда имѣемъ точное выраженіе этой функціи, а не приближенное. Выраженіе же для живой силы, взятое Навье, приближенное, потому что средняя величина изъ квадратовъ чиселъ не равна квадрату средней изъ этихъ чиселъ. Точное выраженіе для живой силы получается слѣдующимъ образомъ: называя буквою z глубину погруженія

---

*) Résumé des leçons donneés à l'école des ponts et chausseés etc., par M. Navier. Bruxelles. 1839.

подъ свободною поверхностью безконечно узкой полоски, площадь которой равна ldz, получимъ для скорости истеченія чрезъ эту полоску выраженіе $\sqrt{2gz}$, а для расхода — выраженіе $\mu ldz\sqrt{2gz}$; слѣдов., для живой силы всей струи получаемъ выраженіе

$$\Delta\mu l\sqrt{2g}\int_{h-y}^{h} z\sqrt{z}\,.\,dz \quad \text{или} \quad \tfrac{2}{5}\mu\Delta l\sqrt{2g}\,[h^{\frac{5}{2}} - (h-y)^{\frac{5}{2}}],$$

которое обращается въ наибольшее при $y = h$. Слѣдовательно, еслибы положеніе Навье о томъ, что живая сила струи должна быть наибольшею, было истиннымъ, истеченіе совершалось бы безъ пониженія уровня воды надъ порогомъ водослива.

Численная величина отношенія $\frac{y}{h}$ зависитъ отъ многихъ обстоятельствъ; какъ среднее значеніе, для этого отношенія можно принять дробь 0,86. Принимая въ приближенной формулѣ (28) $y=0{,}86h$, получимъ:

$$Q = \mu\,.\,0{,}86\sqrt{1-0{,}43}\,.\,hl\sqrt{2gh} = 0{,}65\mu hl\sqrt{2gh}.$$

Значеніе коэффиціента μ, въ разсматриваемомъ случаѣ, вѣроятно, близко къ 0,62; поэтому, предъидущее выраженіе можно написать въ видѣ:

$$Q = 0{,}65\,.\,0{,}62hl\sqrt{2gh} = 0{,}403hl\sqrt{2gh}.$$

Сравнивая эту формулу съ (26), найдемъ:

$$\tfrac{2}{3}\mu = 0{,}403 \quad \text{или} \quad \mu = 0{,}605.$$

Такимъ образомъ, какъ среднее значеніе для коэффиціента μ въ формулѣ (26) (при значительномъ удаленіи порога водослива отъ дна резервуара и при ширинѣ l значительно меньшей ширины той стѣнки, въ которой сдѣланъ водосливъ) можно принимать дробь 0,605. Это среднее значеніе совершенно согласуется и съ данностью *Бидона*, который предлагаетъ *) въ

*) Mémoire de l'Académie de Turin. 1820.

формулѣ (26) принимать $\mu =$ отъ 0,603 до 0,607, хотя *Д'Обюиссонъ* *) въ этомъ же случаѣ совѣтуетъ брать $\mu = 0{,}617$. *Буало* **) для водосливовъ въ тонкой стѣнкѣ *во всю ея ширину* предлагаетъ формулу слѣдующаго вида:

$$Q = lh\sqrt{\frac{2gy}{1-\left(\frac{h}{h'}\right)^2}},$$

которую, если угодно, можно подвести къ виду формулы (26), принявъ

$$\tfrac{2}{3}\mu = \sqrt{\frac{y}{h}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{h}{h'}\right)^2}}$$

и въ которой значенія буквъ y и h' указаны на фиг. 19. Такимъ образомъ, значеніе коэффиціента μ въ формулѣ (26) *Буало* дѣлаетъ зависимымъ отъ отношеній $\frac{y}{h}$ и $\frac{h}{h'}$. Для практическихъ примѣненій своей формулы Буало даетъ таблицы, указывающія на значенія отношенія $\frac{y}{h}$, соотвѣтствующія разнымъ значеніямъ h.

Ниже помѣщаемая таблица, составленная на основаніи опытовъ *Понселе* и *Лебро*, даетъ прямо значенія коэффиціента $\mu_0 = \frac{2}{3}\mu$ въ формулѣ (26) для водосливовъ въ тонкой стѣнкѣ, ширина которой значительно превосходитъ ширину водослива:

$h =$	0,01;	0,02;	0,03;	0,04;	0,05;	0,06;	0,07;	
$\mu_0 =$	0,424;	0,417;	0,412;	0,407;	0,404;	0,401;	0,398;	
$h =$	0,08;	0,09;	0,10;	0,14;	0,16;	0,20;	0,25;	0,30 мет.
$\mu_0 =$	0,397;	0,396;	0,395;	0,393;	0,393;	0,390;	0,379;	0,371.

Такъ какъ въ этой таблицѣ не отражается вліяніе на коэффиціентъ расхода значеній отношенія $\frac{h}{h'}$ и отношенія $\frac{l}{L}$ ширины водослива къ ширинѣ стѣнки резервуара, то *Вейсбахъ* ***),

*) Annales des Mines. 1828.

**) Traité de la mesure des eaux courantes. Paris. 1854.

***) Die Experimental-Hydraulik.

на основаніи своихъ опытовъ, совѣтуетъ, вмѣсто значеній μ_0, помѣщенныхъ въ предъидущей таблицѣ, брать коэффиціентъ μ', опредѣляемый формулою

$$\mu' = \mu_0 \left[1 + 1{,}718 \left(\frac{lh}{Lh'}\right)^4\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

а когда водосливъ занимаетъ всю ширину стѣнки, т.-е. когда $l = L$, то формулою

$$\mu' = \mu_0 \left[1{,}041 + 0{,}3693 \left(\frac{h}{h'}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Брашманъ, для коэффиціента μ въ формулѣ (26), даетъ слѣдующее выраженіе:

$$\tfrac{2}{3}\mu = 0{,}3838 + 0{,}0386 \frac{l}{L} + \frac{0{,}00053}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

въ которомъ h должно выразить въ метрахъ.

Редтенбахеръ *) для той же формулы (26) даетъ

$$\tfrac{2}{3}\mu = 0{,}381 + 0{,}062 \frac{l}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Причемъ говоритъ, что это выраженіе даетъ весьма близкія значенія къ истиннымъ только при слѣдующихъ условіяхъ: 1) что сѣченія резервуара по крайней мѣрѣ въ пять разъ болѣе площади lh; 2) что дробь $\frac{l}{L}$ не менѣе $\frac{1}{3}$; 3) что высота порога надъ уровнемъ воды въ томъ резервуарѣ, въ который вода истекаетъ (нижній резервуаръ), не менѣе $2h$ и 4) что стѣнка, въ которой прорѣзано отверстіе, тонкая.

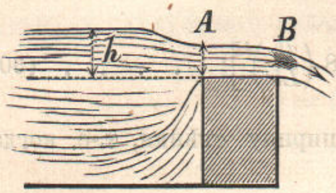
Когда $\frac{l}{L} = 1$, формула эта даетъ:

$$Q = 0{,}443 lh \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

52. Когда водосливное отверстіе прорѣзано *въ толстой стѣнкѣ*, тогда вода, пройдя чрезъ это отверстіе, движется какъ бы въ

*) Resultate für den Maschinenbau.

руслѣ, которое и направляетъ движенiе такимъ образомъ, что частицы описываютъ прямыя линiи параллельныя дну русла.



Слѣдов., въ такомъ случаѣ скорость всѣхъ струекъ должно считать одинаковою и тою же самою, какъ и у самыхъ верхнихъ струекъ AB (фиг. 20), а потому для расхода получается формула:

Фиг. 20.

$$Q = \mu l y \sqrt{2g(h-y)} \quad . \quad (34)$$

Для практическаго примѣненiя этой формулы необходимо знать, кромѣ коэффицiента μ, еще и значенiе отношенiя $\frac{y}{h}$ высотъ, соотвѣтствующее данному значенiю напора h. Здѣсь заслуживаетъ вниманiя то обстоятельство, что среднее значенiе этого отношенiя, какъ показали опыты, весьма близко къ тому значенiю, при которомъ расходъ Q достигаетъ своего maximum'а. Приравнивая нулю производную по y функцiи $y\sqrt{h-y}$, получаемъ $y = \frac{2}{3}h$. Это значенiе для y и есть то, при которомъ Q дѣлается наибольшимъ; слѣдов., имѣемъ:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l h \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{2gh} = 0{,}385\mu l h\sqrt{2gh}.$$

Принимая здѣсь для μ значенiе близкое къ тому, какое соотвѣтствуетъ случаю истеченiя изъ отверстiя, снабженнаго выходящею трубочкою, т.-е. близкое къ 0,815, напр., принявъ $\mu = 0{,}80$, получаемъ:

$$Q = 0{,}308 l h \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Слѣдующая таблица, составленная на основанiи опытовъ *Понселе* и *Лебро*, можетъ служить для опредѣленiя коэффицiента μ въ формулѣ

$$Q = \mu l h \sqrt{2gh}$$

для водосливовъ *въ толстой стѣнкѣ*:

$h = 0{,}02;\ 0{,}03;\ 0{,}04;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}07;\ 0{,}08;$
$\mu = 0{,}192;\ 0{,}234;\ 0{,}263;\ 0{,}278;\ 0{,}286;\ 0{,}292;\ 0{,}297;$
$h = 0{,}09;\ 0{,}10;\ 0{,}12;\ 0{,}14;\ 0{,}16;\ 0{,}18;\ 0{,}20;\ 0{,}30;$ метр.
$\mu = 0{,}301;\ 0{,}304;\ 0{,}309;\ 0{,}313;\ 0{,}316;\ 0{,}317;\ 0{,}319;\ 0{,}324.$

Впослѣдствіи, когда ознакомимся съ движеніемъ воды въ рѣкахъ и каналахъ, мы укажемъ на возможность опредѣленія, въ разсматриваемомъ случаѣ, высоты y путемъ теоретическихъ соображеній.

53. Выведенные въ предъидущихъ №№ формулы для истеченія чрезъ водосливныя отверстія относятся къ случаямъ истеченія изъ резервуаровъ, содержащихъ покоющуюся воду. Въ практикѣ встрѣчаются и такіе случаи истеченія чрезъ водосливы, когда воду, находящуюся въ резервуарѣ, нельзя считать неподвижною. Напр., подобный случай имѣетъ мѣсто, когда въ каналѣ, или небольшой рѣкѣ, будетъ построена досчатая запруда, или перемычка, и вода будетъ переливаться чрезъ верхнее ребро этой запруды. Такого рода запруды устраиваютъ, когда желаютъ опредѣлить количество воды, доставляемое каналомъ или рѣчкою.

Здѣсь необходимо отличать два случая истеченія: когда верхнее ребро запруды, т.-е. порогъ водосливного отверстія, лежитъ выше уровня воды въ отводящей части канала (въ которую поступаетъ истекающая вода) и случай, когда этотъ порогъ будетъ лежать ниже уровня воды въ упомянутой части канала.

Въ первомъ случаѣ истеченія, вода, пройдя порогъ водослива, будетъ двигаться свободно въ воздухѣ, т.-е. точно такъ же, какъ и въ случаѣ, представленномъ на фиг. 19. Понятно, что для этого случая истеченія нужно въ формулѣ (27) напоръ h увеличить высотою, соотвѣтствующею скорости движенія воды въ приводящей части канала. Называя эту послѣднюю скорость буквою c для расхода въ разсматриваемомъ случаѣ, получимъ формулу:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l \sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h - y + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad . \quad . \quad (36)$$

Но, обозначая чрезъ $h + h'$ полную глубину воды въ приводящей части канала (см. фиг. 19) и чрезъ L его ширину, будемъ имѣть еще и слѣдующую формулу:

$$c = \frac{L(h + h')}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Такъ какъ высота y не опредѣляется теоріею, то формулу (36), обыкновенно, замѣняютъ слѣдующею простѣйшею:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l \sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{3g}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

а происходящую отъ этого погрѣшность предоставляютъ исправить приличнымъ выборомъ значенія для коэффиціента μ. Формула (38) принадлежитъ *Эйтельвейну*. Пользоваться однако этою формулою для опредѣленія расхода Q неудобно, такъ какъ она приводитъ къ уравненію высокой степени относительно неизвѣстной Q. Единственно практически удобною формулою есть формула (26), которою должно пользоваться и въ разсматриваемомъ случаѣ истеченія.

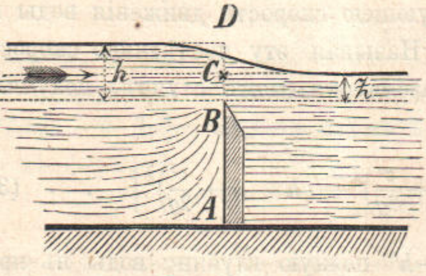
Что же касается значеній въ этой формулѣ коэффиціента μ, то ихъ всего лучше опредѣлять изъ слѣдующихъ формулъ, данныхъ *Риттеромъ фонъ-Вексомъ* *):

$$\tfrac{2}{3}\mu = 0{,}4001 + \frac{0{,}0011}{h} + 0{,}00048L \text{ . (если } l = L);$$

$$\tfrac{2}{3}\mu = 0{,}3655 + 0{,}02357\frac{l}{L} + \frac{0{,}002384}{h} + 0{,}00305l \text{ (если } l \text{ не равно } L).$$

Въ обѣихъ этихъ формулахъ h и l должно выражать въ метрахъ.

Въ случаѣ, представленномъ на фиг. 21, когда порогъ B досчатой запруды будетъ лежать ниже уровня воды въ отводящей части канала, водосливное отверстіе BD можно разсматривать какъ состоящее изъ двухъ частей: изъ части CD, представляющей собственно водосливное отверстіе, и изъ части BC, представляющей обыкновенное отверстіе, имѣющее и верх-



Фиг. 21.

*) Entwicklung neuer genauer Formeln zur Berechnung der Wasserabflussmengen bei Ueberfallwehren etc. Von Gustav Ritter von Wex. Leipzig. 1888.

ное ребро. Слѣдов., пренебрегая скоростью движенія воды въ каналѣ, для расхода Q можно принять формулу:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l(h-z)\sqrt{2g(h-z)} + \mu' lz\sqrt{2g(h-z)}$$

или
$$Q = [\tfrac{2}{3}\mu(h-z) + \mu' z]l\sqrt{2g(h-z)} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Глубины h и z погруженія порога B подъ свободною поверхностью воды въ каналѣ, приводящемъ и отводящемъ воду, должно опредѣлить непосредственными измѣреніями. Если въ послѣдней формулѣ примемъ для μ и μ', какъ среднее значеніе, дробь 0,62, то получимъ формулу:

$$Q = 0{,}62\left(\frac{2h+z}{3}\right)l\sqrt{2g(h-z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Леборо *) для этого случая даетъ формулу

$$Q = \mu lh\sqrt{2g(h-z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

въ которой коэффиціентъ μ должно брать изъ слѣдующей, составленной имъ на основаніи опытовъ, таблицы:

$\frac{h-z}{h}=$	0,002;	0,003;	0,004;	0,005;	0,006;	0,007;	0,008;
$\mu =$	0,295;	0,363;	0,430;	0,496;	0,556;	0,597;	0,605;
$\frac{h-z}{h}=$	0,009;	0,010;	0,015;	0,020;	0,025;	0,030;	0,035;
$\mu =$	0,600;	0,596;	0,580;	0,570;	0,557;	0,546;	0,537;
$\frac{h-z}{h}=$	0,040;	0,045;	0,050;	0,060;	0,080;	0,100;	0,15;
$\mu =$	0,531;	0,526;	0,522;	0,519;	0,517;	0,516;	0,512;
$\frac{h-z}{h}=$	0,20;	0,25;	0,30;	0,35;	0,40;	0,45;	0,50;
$\mu =$	0,507;	0,502;	0,497;	0,492;	0,487;	0,480;	0,474;
$\frac{\mu-h}{h}=$	0,55;	0,60;	0,70;	0,80;	0,90;	1,00;	
$\mu =$	0,466;	0,459;	0,444;	0,427;	0,409;	0,390.	

*) Principes d'hydraulique, T. I.

54. *Случай истеченія чрезъ отверстія, снабженныя выходящими наружу коническими трубочками.*

Опыты надъ истеченіемъ воды чрезъ отверстія, снабженныя коническими, съуживающимися трубочками, производили *д'Обюиссонъ* и *Кастель* *). Найденныя ими численныя значенія для коэффиціента расхода μ, соотвѣствующія значеніямъ угла β, образуемаго двумя діаметрально противоположными производящими конуса, помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

$\beta = 1^\circ 36'$; $3^\circ 10'$; $5^\circ 26'$; $8^\circ 58'$; $12^\circ 4'$; $13^\circ 24'$; $14^\circ 28'$;
$\mu = 0{,}866$; $0{,}895$; $0{,}924$; $0{,}934$; $0{,}942$; $0{,}946$; $0{,}941$;
$\beta = 19^\circ 24$; 21°; $29^\circ 58$; $40^\circ 20'$; $48^\circ 50^o$;
$\mu = 0{,}924$; $0{,}918$; $0{,}896$; $0{,}869$; $0{,}847$.

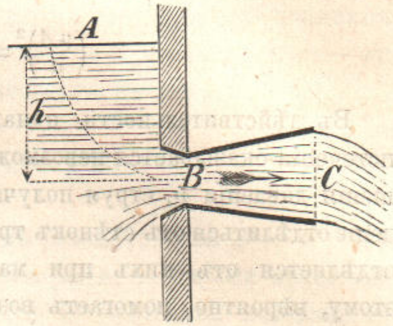
Изъ таблицы этой видно, что при β, равномъ около $13\frac{1}{2}$ градусовъ, коэффиціентъ μ достигаетъ своего наибольшаго значенія. Въ существованіи maximum'а для коэффиціента расхода, въ разсматриваемомъ случаѣ, не трудно отдать себѣ отчетъ, если вспомнимъ, что коэффиціентъ этотъ образуется отъ перемноженія коэффиціентовъ сжатія и скорости. При углѣ $\beta = 0^\circ$, коническая трубочка превращается въ цилиндрическую, для которой, какъ это намъ уже извѣстно, $\alpha = 1$ и $\varphi = 0{,}815$; при всякомъ же иномъ значеніи для β, коэффиціентъ α меньше единицы, а коэффиціентъ φ больше $0{,}815$. Такимъ образомъ, въ произведеніи $\alpha\varphi$, съ увеличеніемъ угла β, первый множитель уменьшается, а второй увеличивается. Понятно, что въ предѣлахъ отъ $\beta = 0^\circ$ до $\beta = 13\frac{1}{2}$ градусовъ, возрастаніе φ идетъ въ бо́льшей пропорціи, нежели убываніе α, а начиная съ $13\frac{1}{2}$ градусовъ, обратно, множитель α убываетъ въ бо́льшей пропорціи, нежели возрастаетъ множитель φ.

При истеченіи изъ отверстія, снабженнаго коническою, расширяющеюся трубочкою, заслуживаетъ вниманія тотъ фактъ, что въ самомъ узкомъ сѣченіи трубочки получается давленіе, меньшее давленія въ томъ пространствѣ, въ которое жидкость истекаетъ.

---

*) Annales des Mines (1838), T. XIV и Aubuisson, Traité d'Hydraulique etc. Paris. 1840.

Дѣйствительно, пусть h обозначаетъ глубину погруженія оси трубочки подъ свободною поверхностью воды въ сосудѣ (фиг. 22), a и A — площади поперечныхъ сѣченій трубочки въ мѣстахъ B и C, v и V — скорости теченія въ этихъ сѣченіяхъ и, наконецъ, p и P — давленія въ этихъ же сѣченіяхъ. Послѣднее давленіе, какъ представляющее давленіе той среды, въ которую вытекаетъ струя, предполагается одинаковымъ съ давленіемъ, дѣйствующимъ на свободной поверхности. Для опредѣленія обстоятельствъ истеченія положимъ, что ABC представляетъ траекторію одной изъ тѣхъ частицъ жидкости, которая при своемъ движеніи должна пройти чрезъ центръ сѣченія B и примѣнимъ къ этой траекторіи теорему Д. Бернулли. Само собою разумѣется, что уровень въ сосудѣ предполагается постояннымъ и движеніе установившимся. Условившись считать высоты отъ горизонтальной плоскости, проходящей чрезъ ось трубочки, и принимая скорость на свободной поверхности за весьма малую, получимъ для точекъ A, B и C траэкторіи уравненія:



Фиг. 22.

$$h+\frac{P}{\Delta}=\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}=\frac{P}{\Delta}+\frac{V^2}{2g}$$

и $$Q=av=\mu AV,$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$V^2=2gh, v=\sqrt{2g\left(h+\frac{P-p}{\Delta}\right)},\ \frac{P-p}{\Delta}=\left[\left(\frac{\mu A}{a}\right)^2-1\right]h$$

и $$Q=a\sqrt{2g\left(h+\frac{P-p}{\Delta}\right)}.$$

Такъ какъ p не можетъ быть отрицательною величиною, то наибольшее значеніе для расхода Q получается при $p=0$. Это наибольшее значеніе опредѣляется формулою

$$Q_{max.}=a\sqrt{2g\left(h+\frac{P}{\Delta}\right)},$$

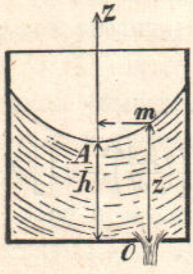
которая получилась бы и въ томъ случаѣ, еслибы истеченіе совершалось чрезъ сѣченіе a въ пустое пространство. Отношеніе же площадей A и a, при которомъ давленіе p въ сѣченіи B должно обращаться въ нуль, опредѣляется изъ уравненія:

$$\left(\frac{\mu A}{a}\right)^2 = 1 + \frac{P}{\Delta h}.$$

Въ дѣйствительности однако реализировать такой случай истеченія оказывается невозможнымъ, такъ какъ, по мѣрѣ уменьшенія давленія p, струя получаетъ все бо́льшее и бо́льшее стремленіе отдѣлиться отъ стѣнокъ трубочки и наконецъ дѣйствительно отдѣляется отъ нихъ при малѣйшемъ сотрясеніи. Отдѣленію этому, вѣроятно, помогаетъ воздухъ, содержащійся въ растворѣ въ водѣ и выдѣляющійся въ сѣченіи B.

Такъ какъ давленіе p въ сѣченіи B меньше давленія наружнаго P, то, сдѣлавъ въ стѣнкѣ трубочки, противъ сѣченія B, отверстіе и заставляя воду истекать чрезъ трубочку, мы такимъ образомъ заставимъ и наружный воздухъ всасываться чрезъ упомянутое отверстіе во внутрь трубочки и вытекать изъ ея оконечности вмѣстѣ съ водою. Этимъ всасывающимъ дѣйствіемъ конической трубочки, внутри которой движется жидкость, пользуются въ практикѣ для подъема воды.

55. *Случай истеченія изъ сосуда, вращающагося равномѣрно около вертикальной оси.*



Фиг. 23.

Пусть фиг. (23) представляетъ такой сосудъ и O весьма малое отверстіе, сдѣланное въ днѣ его. Въ № 7 было доказано, что въ случаѣ равномѣрнаго вращенія сосуда около вертикальной оси, поверхности уровня жидкости, вращающейся вмѣстѣ съ сосудомъ, суть параболоиды вращенія, опредѣляемые уравненіемъ:

$$\omega^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2} + gz = C,$$

или уравненіемъ $\omega^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2} - gz = C$, если координатную ось z направимъ не сверху внизъ, какъ это имѣло мѣсто въ № 7, но снизу вверхъ. Въ уравненіи этомъ ω есть угловая скорость вращенія сосуда, а x^2+y^2 — квадратъ разстоянія разсматриваемой точки поверхности отъ оси вращенія. Положимъ, что вершина A параболоида, образуемаго свободною поверхностью, находится на высотѣ h надъ горизонтальнымъ дномъ сосуда; тогда, принимая въ уравненіи параболоида $z=h$ и $x=y=O$, получимъ $C=-gh$; а слѣдов., уравненіе это можно написать въ видѣ:

$$z=h+\frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2).$$

Если въ этомъ уравненіи будемъ разсматривать x^2+y^2 какъ квадратъ разстоянія r центра отверстія O отъ оси вращенія, то z представитъ возвышеніе точки m свободной поверхности надъ отверстіемъ, т.-е. тотъ напоръ, подъ дѣйствіемъ котораго совершается истеченіе. Слѣдов., искомая скорость v истеченія изобразится такъ

$$v=\sqrt{2g\left(h+\frac{(\omega r)^2}{2g}\right)}.$$

Такъ какъ ωr есть скорость движенія центра отверстія, то, обозначая эту скорость чрезъ c, получаемъ для скорости истеченія формулу:

$$v=\sqrt{2g\left(h+\frac{c^2}{2g}\right)}=\sqrt{c^2+2gh}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Понятно, что найденное значеніе для скорости v не зависитъ отъ формы сосуда, а потому формула (42) будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда, вслѣдствіе особаго расположенія стѣнокъ сосуда или же вслѣдствіе существованія крышки, образованіе параболоида на самомъ дѣлѣ будетъ невозможнымъ.

Довольно подробныя свѣдѣнія о вытеканіи жидкостей изъ сосудовъ, находящихся въ состояніи движенія, можно почерпнуть въ Гидродинамикѣ *Боссю* *) и въ Гидравликѣ *Шеффлера* **).

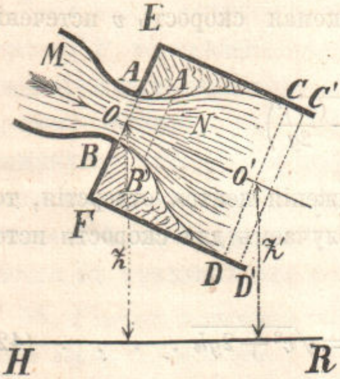
*) Bossut. Traité d'hydrodynamique; T. I.

**) Scheffler. Die Principien der Hydrostatik und Hidraulik. Bd. I.

Случаи движенія, въ которыхъ гидравлическія сопротивленія не могутъ быть пренебрегаемы.

56. *Вліяніе быстрыхъ измѣненій поперечныхъ сѣченій сосуда.* До сихъ поръ мы разсматривали такіе случаи истеченія, когда гидравлическими сопротивленіями можно было пренебрегать; теперь же переходимъ къ разсмотрѣнію случаевъ, когда сопротивленія эти обнаруживаютъ болѣе или менѣе чувствительное вліяніе на скорость движенія жидкости.

Мы начнемъ со случая, когда нѣкоторая часть сосуда, изъ котораго вытекаетъ жидкость, имѣетъ форму, указанную на фиг. 24, т.-е. представляетъ въ одномъ мѣстѣ быстрое расширеніе поперечнаго сѣченія. Въ такомъ случаѣ жидкость, при переходѣ изъ узкой части M сосуда въ широкую N, не сейчасъ пристаетъ къ стѣнкамъ этой послѣдней части, но образуетъ струю постепенно расширяющуюся, такъ, что только на нѣкоторомъ разстояніи, впрочемъ не большомъ, отъ узкаго сѣченія AB струя получаетъ толщину, при которой занимаетъ все сѣченіе части N. Пространство $AECBFD$, называемое *мертвымъ пространствомъ* сосуда, заполняется жидкостью, имѣющею неправильное движеніе, сопровождающееся безпрерывными ударами частицъ другъ о друга. Удары эти поглощаютъ скорость движенія частицъ, въ этомъ пространствѣ находящихся, такъ что мертвое пространство можно разсматривать какъ бы наполненное жидкостью, находящеюся въ состояніи покоя. Это обстоятельство позволяетъ допустить, что давленіе на всемъ протяженіи сѣченія EF распредѣлено по законамъ Гидростатики, такъ какъ въ точкахъ части AB этого сѣченія движеніе совершается параллельными струйками. Въ сѣченіи CD, если



Фиг. 24.

только оно принадлежитъ той части сосуда, которая заполнена правильно движущеюся жидкостью, всѣ элементарныя струйки будутъ также параллельны между собою, а потому и въ этомъ сѣченіи давленіе будетъ распредѣлено по законамъ Гидростатики.

Пусть p и p' будутъ среднія значенія давленія въ сѣченіяхъ EF и CD, v и v'—среднія скорости въ этихъ сѣченіяхъ и a и A —площади сѣченій AB и CD. Въ теченіи элемента времени dt, часть жидкости, лежащая между сѣченіями AB и CD, займетъ новое положеніе $A'B'C'D'$. Вмѣсто такого безконечно малаго перемѣщенія конечнаго объема $ABCD$, можно, если только движеніе будетъ установившимся, разсматривать конечное перемѣщеніе безконечно малаго объема $ABA'B'$ въ положеніе $CDC'D'$, предполагая, притомъ, что объемъ $A'B'CD$ какъ бы оставался неподвижнымъ. Къ разсматриваемому такимъ образомъ перемѣщенію примѣнимъ теперь теорему количествъ движенія, принимая геометрическую ось цилиндрической части N сосуда за ось проекцій, а горизонтальную плоскость HR за ту плоскость, отъ которой будемъ считать высоты.

Приращеніе количества движенія въ промежутокъ времени dt, очевидно, будетъ:

$$\frac{\Delta Av'dt}{g}v' - \frac{\Delta avdt}{g}v$$

или, такъ какъ $Av' = av$,

$$\frac{\Delta avdt}{g}(v' - v) = \frac{\Delta Av'dt}{g}(v' - v).$$

Внѣшнія силы, дѣйствующія на часть жидкости, заключенную между сѣченіями EF и CD, суть: вѣсъ этой жидкости и давленія на точки, ограничивающей ее поверхности; но вѣсъ равенъ $\Delta A.\overline{OO'}$, слѣдов. импульсъ вѣса, спроектированнаго на ось части N, будетъ равенъ $\Delta A(z - z')dt$; $z - z'$ есть разность возвышеній центровъ тяжести сѣченій EF и CD надъ плоскостью HR и вмѣстѣ съ тѣмъ есть проекція длины OO' части N на вертикальное направленіе. Импульсы давленій, дѣйствующихъ на сѣченія EF и CD, будутъ $pAdt$ и $-p'Adt$ и, наконецъ, импульсы давленій, дѣйствующихъ на боковую поверхность $ECFD$, какъ силъ перпендикулярныхъ къ оси проекцій, совершенно не войдутъ въ составъ искомаго уравненія. Слѣдов., начало количествъ движенія даетъ намъ уравненіе:

$$\frac{\Delta A v' \partial t}{g}(v' - v) = \Delta A(z - z')\partial t + A(p - p')\partial t$$

или

$$\frac{v'(v' - v)}{g} = z - z' + \frac{p - p'}{\Delta}.$$

Но не трудно убѣдиться, что

$$v'(v' - v) = \tfrac{1}{2}(v - v')^2 + \tfrac{1}{2}(v'^2 - v^2),$$

а потому послѣднее уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$z + \frac{p}{\Delta} + \frac{v^2}{2g} = z' + \frac{p'}{\Delta} + \frac{v'^2}{2g} + \frac{(v - v')^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Количества $z + \frac{p}{\Delta} + \frac{v^2}{2g}$ и $z' + \frac{p'}{\Delta} + \frac{v'^2}{2g}$ (см. № 25) представляютъ возвышенія плоскостей напора, соотвѣтствующихъ точкамъ O и O' траэкторіи средней струйки. Возвышенія эти, согласно теоремѣ Д. Бернулли, должны бы быть равны между собою, между тѣмъ изъ уравненія (43) видимъ, что при переходѣ отъ сѣченія AB къ сѣченію CD, плоскость напора понижается на величину, равную высотѣ, соотвѣтствущей разности скорости $v - v'$. Но теорема Д. Бернулли была выведена изъ общихъ уравненій движенія, въ которыхъ не были приняты во вниманіе гидравлическія сопротивленія; поэтому, несогласіе послѣдняго вывода съ этою теоремою должно приписать существованію гидравлическихъ сопротивленій, поглощающихъ часть напора при переходѣ жидкости изъ узкаго сосуда въ широкій. Дѣйствительно, при переходѣ жидкости отъ сѣченія AB къ сѣченію CD скорость движенія, на пути сравнительно небольшомъ, уменьшается на конечную величину, переходя изъ v къ v', слѣдоват., проявляется сопротивленіе, тождественное съ такъ-называемымъ ударомъ, на преодолѣніе котораго и затрачивается (на каждую единицу вѣса протекающей жидкости) работа, равная живой силѣ отъ потерянной скорости, т.-е. равная $\frac{(v - v')^2}{2g}$, какъ это слѣдуетъ изъ начала *Карно*.

Изъ всего выше сказаннаго заключаемъ, что уравненіе вида:

$$z+\frac{p}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}=z'+\frac{p'}{\Delta}+\frac{v'^2}{2g}+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

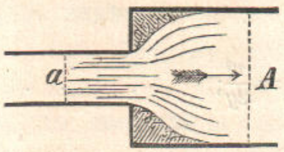
выражаетъ собою теорему болѣе общую, нежели теорема Д. Бернулли. Членъ y, входящій во второй части уравненія, представляетъ высоту, теряющуюся на тѣ гидравлическія сопротивленія, какія могутъ проявляться на пути частицы жидкости отъ одной точки ея траэкторіи, въ которой скорость равнялась v, къ другой точкѣ, въ которой скорость эта была равна v'. Такъ, напр., въ случаѣ, къ которому относится формула (43), высота y, потерянная на ударъ, изображается формулою

$$y=\frac{(v-v')^2}{2g},$$

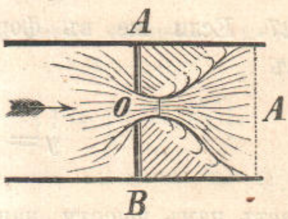
или, принимая во вниманіе, что $Av'=av=Q$, имѣемъ для этой высоты формулу:

$$y=\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{A}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Эта послѣдняя формула имѣла бы мѣсто и въ случаѣ сосуда, указаннаго на фиг. 25; a обозначало бы площадь сѣченія узкой части сосуда, а A — широкой.



Фиг. 25.



Фиг. 26.

57. Въ случаѣ сосуда, имѣющаго форму, указанную на фиг. 26, струя жидкости, пройдя чрезъ отверстіе O, сдѣланное въ перегородкѣ AB (напр., отверстіе для клапана), будетъ сжиматься; поэтому, примѣняя формулу (45) къ этому случаю, нужно въ ней количество a разсматривать какъ площадь отверстія O,

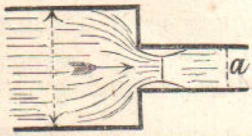
но при этомъ необходимо имѣть въ виду, что истинный расходъ Q будетъ опредѣляться не формулою $Q = av$, но формулою $Q = \mu av$, а потому для высоты напора, теряющейся на ударъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, будемъ имѣть:

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu a} - \frac{1}{A}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

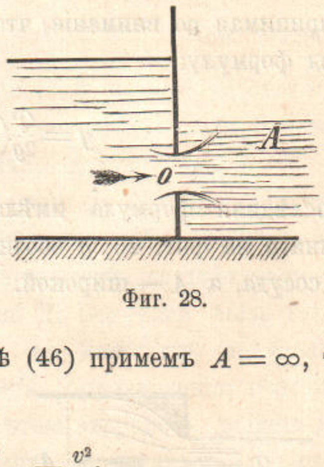
Если въ этой формулѣ примемъ $A = a$, тогда она обратится въ слѣдующую:

$$y = \frac{Q^2}{2ga^2}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

и представитъ высоту напора, теряющуюся при переходѣ жидкости изъ широкаго сосуда въ узкій, какъ это представлено на



Фиг. 27.



Фиг. 28.

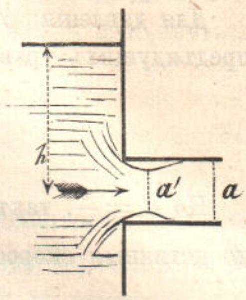
фиг. 27. Если же въ формулѣ (46) примемъ $A = \infty$, то получимъ

$$y = \frac{Q^2}{2g(\mu a)^2} = \frac{v^2}{2g}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

что даетъ намъ высоту напора, теряющуюся на ударъ, когда струя, обладающая скоростью v, вливается въ сосудъ, въ которомъ жидкость находится въ состояніи покоя, какъ это, напр., имѣетъ мѣсто въ случаѣ, представленномъ на фиг. 28.

58. Умѣя опредѣлять высоту напора теряющуюся на ударъ отъ быстраго расширенія сѣченія струи, мы можемъ отдать себѣ отчетъ въ явленіяхъ, сопровождающихъ истеченіе изъ отверстія, снабженнаго выходящею трубочкою. Струя, при входѣ

въ прибавочную трубочку, сжимается точно такъ же, какъ и въ случаѣ прохожденія чрезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, но затѣмъ, при достаточной длинѣ трубочки (см. № 45), снова расширяется и заполняетъ все сѣченіе послѣдней. Слѣдоват., при переходѣ отъ сжатаго сѣченія a' (фиг. 29) къ сѣченію a, струя находится въ обстоятельствахъ, тождественныхъ со случаемъ, разсмотрѣннымъ въ № 56; поэтому, примѣняя къ свободной поверхности, а также и къ сѣченіямъ a' и a трубочки обобщенную теорему Д. Бернулли, т.-е. формулу (44), получаемъ:



Фиг. 29.

$$h+\frac{P}{\Delta}=\frac{p'}{\Delta}+\frac{v'^2}{2g}=\frac{P}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}+\frac{(v'-v)^2}{2g}.$$

Здѣсь P есть внѣшнее давленіе, дѣйствующее какъ на свободной поверхности жидкости въ сосудѣ, такъ и на оконечности трубочки; p'—давленіе въ сжатомъ сѣченіи a', v'—скорость въ этомъ сѣченіи и v—скорость истеченія изъ оконечности трубочки. Но высота $\frac{(v'-v)^2}{2g}$, теряющаяся при переходѣ отъ сѣченія a' къ сѣченію a, равняется:

$$\frac{Q^2}{2ga^2}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2,$$

такъ какъ $Q=av$, поэтому предъидущія уравненія можно написать въ видѣ:

$$h+\frac{P}{\Delta}=\frac{p'}{\Delta}+\frac{v'^2}{2g}=\frac{P}{\Delta}+\frac{v^2}{2g}\left[1+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2\right].$$

Откуда для скорости v истеченія изъ оконечности трубочки, получаемъ:

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2}}\sqrt{2gh}=\varphi\sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Слѣдов., коэффиціентъ φ скорости, для разсматриваемаго случая истеченія, опредѣляется формулою:

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2}}.$$

Принимая въ этой формулѣ $\mu = 0{,}62$, получаемъ для коэффиціента φ число 0,85, которое отъ числа 0,815, найденнаго для этого случая опытомъ, отличается очень мало.

Для давленія p' въ сжатомъ сѣченіи a' получаемъ, изъ предъидущихъ уравненій, выраженіе:

$$\frac{p'}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + h - \frac{v'^2}{2g}.$$

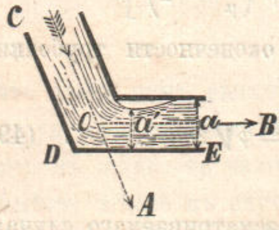
Но $v' = \frac{v}{\mu}$, такъ какъ $\frac{a'}{a} = \mu$ (v' и v суть не теоретическія, но истинныя скорости движенія), поэтому имѣемъ:

$$\frac{p'}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + h - \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{P}{\Delta} - \left(\frac{\varphi^2}{\mu^2} - 1\right) h. \quad . \quad . \quad (50)$$

Принимая во вниманіе, что давленіе p' ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть отрицательною величиною, должно, изъ последней формулы, заключить, что съ возрастаніемъ напора h количество $\frac{\varphi}{\mu} = \frac{1}{\alpha}$ должно уменьшаться, или же, что, при извѣстномъ значеніи для напора h, истеченіе изъ оконечности трубочки должно совершаться *не полною струею*, т.-е. струею, не занимающею всего сѣченія a.

59. *Вліяніе колѣнъ и закругленій.*

Часто встрѣчается необходимость жидкость, изъ нѣкотораго резервуара, подводить къ данному мѣсту помощью трубы, причемъ у трубы такой могутъ существовать колѣна или закругленія. При прохожденіи жидкости чрезъ такія колѣна или закругленія, проявляется также сопротивленіе, которое нужно умѣть опредѣлять.



Фиг. 30.

Пусть фиг. 30 представляетъ колѣно трубы. Такъ какъ траэкторіи частицъ, движущихся въ колѣнѣ, по необходимости, суть нѣкоторыя кривыя линіи, то, въ моментъ прохожденія частицъ жидкости чрезъ колѣно проявляется центробѣжная сила, заставляющая частицы приближаться къ наружной стѣнкѣ CDE трубы. Слѣдствіемъ этого бываетъ образованіе на внутренней стѣнкѣ мертваго пространства и сжатія струи. Если назовемъ буквою a' площадь сѣченія сжатой струи и буквою a площадь сѣченія трубы, то напоръ y, теряющійся на сопротивленіе въ колѣнѣ, долженъ изобразиться формулою:

$$y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{a}{a'} - 1\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

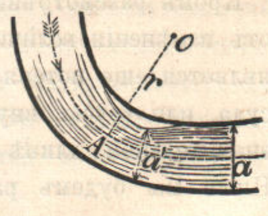
въ которой отношеніе $\frac{a}{a'}$ не остается постояннымъ, но зависитъ отъ угла AOB отклоненія оси трубы отъ первоначальнаго направленія. Называя этотъ уголъ буквою δ, на основаніи опытовъ *Вейсбаха*, имѣемъ слѣдующую зависимость между количествами $\frac{a}{a'}$ и δ:

$$\left(\frac{a}{a'} - 1\right)^2 = 0{,}9457 \sin^2(\tfrac{1}{2}\delta) + 2{,}047 \sin^4(\tfrac{1}{2}\delta) \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Такъ, напр., при колѣнѣ, загнутымъ подъ угломъ въ 90°, получимъ для потери напора

$$y = 0{,}984 \frac{v^2}{2g}$$

что равняется почти цѣлой высотѣ, соотвѣтствующей скорости v движенія воды въ трубѣ. Закругленія производятъ дѣйствіе подобное же какъ и колѣна, какъ это представлено на фиг. 31, а потому потерянный напоръ и для этого случая выражается формулою (51); но коэффиціентъ $\left(\frac{a}{a'} - 1\right)^2$ въ ней должно опредѣлять иначе. *Дюбуа* для этого коэффиціента даетъ слѣдующую эмпирическую формулу:



Фиг. 31.

$$\left(\frac{a}{a'} - 1\right)^2 = (0{,}0039 + 0{,}0185 r)\frac{l}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

въ которой r есть радіусъ AO закругленія оси трубы, а l есть длина криволинейной части этой оси. Какъ r, такъ и l должны быть выражены въ метрахъ.

Вейсбахъ, на основаніи своихъ опытовъ, даетъ для разсматриваемаго случая формулу:

$$\left(\frac{a}{a'}-1\right)^2=\left[0{,}131+1{,}847\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\delta}{90^0} \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

гдѣ r имѣетъ прежнее значеніе, а d есть діаметръ трубы.

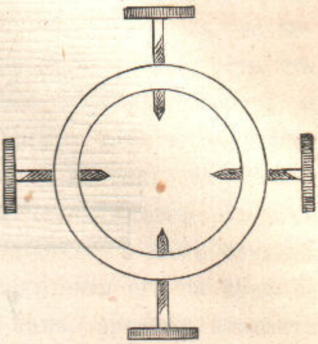
60. *Вліяніе развѣтвленія трубы.*

Если труба, ведущая жидкость, будетъ въ одномъ мѣстѣ раздѣляться на двѣ трубы, или вѣтви, то въ каждой изъ нихъ можетъ проявиться потеря напора и притомъ двоякаго рода: потеря отъ измѣненія направленія движенія и потеря отъ измѣненія величины скорости. Потеря, происходящая отъ измѣненія направленія движенія, для каждой вѣтви опредѣлится по формуламъ (51) и (52), даннымъ для потери въ колѣнѣ; причемъ въ формулѣ (51) на v должно смотрѣть какъ на скорость движенія въ общей трубѣ, до развѣтвленія сей послѣдней. Потеря же, происходящая отъ измѣненія величины скорости, для данной вѣтви, опредѣлится по формулѣ $y=\frac{(v'-v)^2}{2g}$, если скорость v' въ этой вѣтви будетъ болѣе скорости v въ общей трубѣ, или же по формулѣ $\frac{v'^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2$, если скорость v' будетъ менѣе скорости v. Здѣсь коэффиціентъ $\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2$ всегда можно принимать равнымъ 0,38, такъ какъ μ вѣроятно близко къ 0,62.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ выше потерь напора, происходящихъ отъ измѣненія величины и направленія скорости движенія, проявляется еще потеря напора отъ тренія жидкости о стѣнки сосуда, или трубы, внутри которой она движется. Эта потеря, при значительной длинѣ пути, можетъ быть весьма значительною. Ниже мы будемъ разсматривать эту потерю съ надлежащею подробностью, а теперь скажемъ нѣсколько словъ объ опытахъ для опредѣленія коэффиціентовъ α, φ и μ.

61. *Нѣсколько словъ объ опытахъ для опредѣленія коэффиціентовъ* α, φ *и* μ. Простѣйшій опытъ, въ случаѣ, когда поперечное сѣченіе вытекающей въ воздухъ струи не велико, есть опытъ для опредѣленія коэффиціента сжатія, такъ какъ онъ состоитъ въ непосредственномъ измѣреніи сѣченія струи. Для этой цѣли

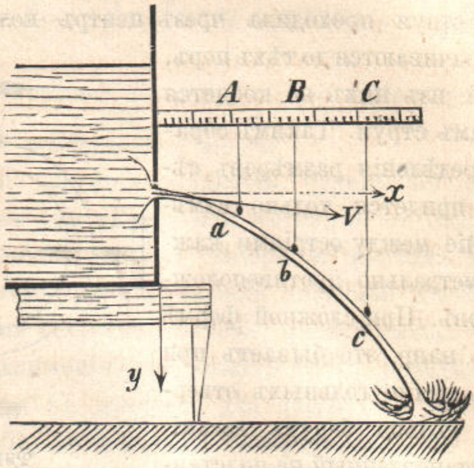
пользуются приборомъ, состоящимъ изъ металлическаго кольца, представленнаго на фиг. (32), снабженнаго винтами, оканчивающимися каждый остріемъ. Кольцо это укрѣпляется на подставкѣ такъ, чтобы струя проходила чрезъ центръ кольца и затѣмъ винтики поворачиваются до тѣхъ поръ, пока каждый изъ нихъ не коснется своимъ остріемъ струи. Такимъ образомъ, для опредѣленія размѣровъ сѣченія струи придется только измѣрить разстояніе между остріями каждой пары діаметрально противоположныхъ винтиковъ. При сложной формѣ сѣченія, какъ напр. это бываетъ при истеченіи изъ прямоугольныхъ отверстій, вмѣсто кольца берутъ восьміугольникъ, установленный на подставкѣ. Къ сторонамъ этого восьміугольника прикладываютъ линейку съ масштабомъ и снабженную винтикомъ съ остріемъ. Дѣленія на линейкѣ указываютъ на положеніе винтика въ отношеніи къ той сторонѣ восьміугольника, къ которой приложена линейка, а оконечность острія, соприкасающаяся поверхности струи, указываетъ на положеніе, въ отношеніи къ той же сторонѣ восьміугольника, одной изъ точекъ периметра струи. Такимъ образомъ, прикладывая линейку къ различнымъ сторонамъ и различнымъ мѣстамъ восьміугольника, можно опредѣлить положеніе сколькихъ угодно точекъ периметра сѣченія. Понятно, что такого рода опыты требуютъ довольно долгаго времени, поэтому и могутъ быть производимы только тогда, когда истеченіе совершается при постоянномъ горизонтѣ.



Фиг. 32.

Опытъ для опредѣленія дѣйствительной скорости истеченія можетъ быть, при постоянномъ уровнѣ, произведенъ слѣдующимъ образомъ: выпускаютъ изъ отверстія, сдѣланнаго въ вертикальной стѣнкѣ сосуда, тонкую струю жидкости и при помощи отвѣсовъ Aa, Bb и Cc, привѣшенныхъ къ горизонтальной линейкѣ съ дѣленіями (фиг. 33), опредѣляютъ абсциссы и ординаты произвольно избранныхъ трехъ точекъ a, b и c струи;

затѣмъ, предполагая, что форма струи пораболическая, т.-е. такая же, какъ и форма траэкторіи тяжелой точки, брошенной въ



Фиг. 33.

пустомъ пространствѣ съ начальною скоростью V, наклонно къ горизонту, вносятъ въ уравненіе траэкторіи

$$y = x \operatorname{tang}\alpha + \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

полученныя значенія для координатъ точекъ a, b и c. Называя эти кординаты чрезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), получаемъ слѣдующихъ три уравненія:

$$y_1 - x_1 \operatorname{tang}\alpha = \frac{g{x_1}^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

$$y_2 - x_2 \operatorname{tang}\alpha = \frac{g{x_2}^2}{2V^2\cos^2\alpha}$$

и $$y_3 - x_3 \operatorname{tang}\alpha = \frac{g{x_3}^2}{2V^2\cos^2\alpha} = \frac{g{x_3}^2}{2V^2}(1 + \operatorname{tang}^2\alpha).$$

Первыя два изъ этихъ уравненій даютъ:

$$\frac{y_1 - x_1 \operatorname{tang}\alpha}{y_2 - x_2 \operatorname{tang}\alpha} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = m^2$$

откуда имѣемъ:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y_1 - m^2 \cdot y_2}{x_1 - m^2 \cdot x_2}.$$

Внося это значеніе для $\tan g\alpha$ въ третье уравненіе, получимъ новое уравненіе, изъ котораго и опредѣлимъ искомую скорость V, такъ какъ въ немъ всѣ величины будутъ извѣстны, за исключеніемъ V.

Опредѣленіе расхода посредствомъ опытовъ тоже не представляетъ большихъ затрудненій, когда расходъ этотъ не великъ. Для этого нужно собирать вытекающую жидкость въ особый резервуаръ, вмѣстимость котораго хорошо извѣстна, и раздѣлить собранный объемъ на полное время истеченія. Частное отъ такого дѣленія и доставитъ искомый расходъ въ единицу времени, если уровень оставался неизмѣннымъ. Въ случаѣ перемѣннаго уровня, такое частное доставитъ намъ средній расходъ. Этотъ средній расходъ, по раздѣленіи его на средній же теоретическій расходъ, доставитъ намъ среднее значеніе коэффиціента μ, соотвѣтствующее тѣмъ значеніямъ напора, какія имѣли мѣсто во время истеченія. Въ случаѣ измѣняемаго уровня, истинный расходъ иногда можетъ быть выводимъ изъ наблюденій надъ пониженіемъ этого уровня.

Формулы, выражающія потерю напора на треніе.

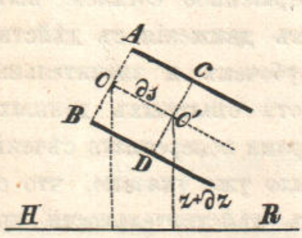
62. Въ № 32 были выведены, изъ уравненій *Навье*, формулы, относящіяся къ движенію капельной жидкости въ трубахъ, когда принимается во вниманіе существующее во время движенія гидравлическое треніе. Совершенное согласіе вытекающихъ изъ этихъ формулъ законовъ движенія съ дѣйствительностью въ случаѣ волосныхъ трубочекъ и значительныя уклоненія теоретическихъ выводовъ отъ опытныхъ данныхъ, въ случаѣ трубы съ конечными размѣрами поперечнаго сѣченія, привело къ заключенію, какъ это было уже указано, что сопротивленіе, приписываемое тренію, въ дѣйствительности происходитъ не столько отъ тренія, сколько отъ поглощенія живой силы во время столкновенія частицъ между собою. Такимъ образомъ, полное сопротивленіе движенію жидкости въ трубѣ должно состоять изъ двухъ частей: изъ правильно и постоянно дѣйствующаго тренія и неправильно дѣйствующаго сопроти-

вленія, происходящаго отъ случайныхъ причинъ, возмущающихъ движеніе. сопротивленія, которое должно возростать съ уменьшеніемъ направляющаго дѣйствія стѣнокъ, т.-е. по мѣрѣ увеличенія діаметра. Это послѣднее сопротивленіе значительно больше тренія при конечныхъ размѣрахъ сѣченія трубы и, обратно, оно весьма мало въ сравненіи съ треніемъ при волосныхъ трубкахъ.

При такомъ воззрѣніи на движеніе жидкости въ трубахъ конечнаго діаметра нужно отказаться отъ всякихъ попытокъ опредѣлить, путемъ теоретическихъ соображеній, дѣйствительное движеніе каждой частицы жидкости, отдѣльно взятой, такъ какъ движеніе это зависитъ отъ множества случайныхъ обстоятельствъ; но, понятно, что всегда можно пріискать для этихъ частицъ такое воображаемое движеніе, которое должно будетъ назвать *среднимъ* и которое, будучи распространено на полную струю движущейся жидкости, приведетъ къ результатамъ, болѣе или менѣе близкимъ къ дѣйствительности.

Будемъ разсматривать случаи установившагося движенія въ прямой трубѣ, съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ, и относительно этого движенія сдѣлаемъ возможно простѣйшее предположеніе, а именно: что всѣ частицы жидкости движутся по прямымъ, параллельнымъ оси трубы, линіямъ съ одинаковою скоростью u.

Пусть AB (фиг. 34) представляетъ первое сѣченіе трубы, въ которое вливается изъ какого-либо резервуара вода; CD второе сѣченіе, находящееся на разстояніи ds отъ перваго; z и $z+dz$ возвышенія центровъ O и O' сѣченій AB и CD, надъ координатною горизонтальною плоскостью HR; p и $p+dp$ давленія въ точкахъ O и O', q периметръ и A площадь каждаго изъ сѣченій трубы.



Фиг. 34.

Такъ какъ, въ силу сдѣланныхъ выше предположеній, масса $ABCD$ воды имѣетъ прямолинейное и равномѣрное движеніе, то дѣйствующія на нее силы должны быть въ равновѣсіи; а потому алгебраическая сумма проекцій этихъ силъ на какое угодно направленіе должна равняться нулю. Но силы эти суть: вѣсъ массы $ABCD$ равный $\Delta A ds$, давленія pA и $-(p+dp)A$ на сѣченія AB и CD, давленіе на боковую поверхность $ACBD$ отъ стѣнокъ трубы и наконецъ треніе, численную величину котораго мы назовемъ буквою Y. Избирая ось OO' трубы за ось проекцій, получаемъ для проекцій этихъ силъ слѣдующія выраженія: проекція вѣса равна $\Delta A ds \, . \cos\alpha$, гдѣ α есть уголъ наклоненія оси OO' къ вертикали, слѣдов., $ds\cos\alpha = -dz$ и $\Delta A ds\cos\alpha = -\Delta A dz$; сумма проекцій давленій pA и $-(p+dp)A$ представится прямо ихъ алгебраическою суммою, т.-е. будетъ равна $-Adp$; проекціи давленій, дѣйствующихъ на боковую поверхность $ACDB$, будутъ равны нулю, такъ какъ давленія эти повсюду перпендикулярны къ оси и, наконецъ, треніе Y, какъ сила, прямо противуположная движенію, доставитъ проекцію, равную $-Y$; слѣдов., имѣемъ уравненіе:

$$\Delta A dz + A dp + Y = 0.$$

Но опыты показали, что треніе Y пропорціонально величинѣ трущейся поверхности (т.-е. числу частицъ, соприкасающихся со стѣнкою трубы), что оно не зависитъ отъ давленія и что оно пропорціонально нѣкоторой функціи отъ скорости u движенія; поэтому можемъ принять: $Y = q ds \, . \varphi(u)$, гдѣ $\varphi(u)$ должна возростать съ увеличеніемъ скорости u и обращаться въ нуль при $u=0$. И такъ, послѣднее уравненіе можно написать въ видѣ:

$$\Delta A dz + A dp + q\varphi(u) ds = 0.$$

Такъ какъ на всемъ протяженіи трубы съ постояннымъ сѣченіемъ количества A, q и u остаются постоянными, то послѣднее уравненіе легко интегрируется. Называя чрезъ z' и p' значенія перемѣнныхъ z и p, соотвѣтствующія сѣченію, находящемуся на разстояніи s отъ перваго, считая по оси трубы, и интегрируя это уравненіе въ предѣлахъ отъ $s=0$ до $s=s$, получимъ:

$$\Delta A(z'-z) + A(p'-p) + qs \, . \varphi(u) = 0,$$

что можно написать и въ видѣ:

$$z + \frac{p}{\Delta} + \frac{u^2}{2g} = z' + \frac{p'}{\Delta} + \frac{u^2}{2g} + \frac{qs}{\Delta}\varphi(u) \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Сравнивая это послѣднее уравненіе съ уравненіемъ (44), видимъ, что напоръ y, теряющійся на треніе на протяженіи s трубы, выражается формулою:

$$y = \frac{qs}{A} \cdot \frac{\varphi(u)}{\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

а слѣдов., напоръ i, теряющійся на треніе на каждой единицѣ длины трубы, можетъ быть опредѣленъ изъ формулы:

$$\frac{A}{q} i = \frac{\varphi(u)}{\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

въ которой средняя скорость u сѣченія и расходъ Q связаны уравненіемъ:

$$Q = Au \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Прони *) первый, на основаніи нѣкоторыхъ соображеній, высказанныхъ Куломбомъ **), предложилъ для функціи $\varphi(u)$ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{\varphi(u)}{\Delta} = au + bu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

въ которомъ коэффиціенты a и b, по мнѣнію Прони, суть количества постоянныя для данной жидкости, независящія ни отъ скорости движенія, ни отъ діаметра трубы, ни отъ физическихъ свойствъ поверхностей ея стѣнокъ.

На основаніи 51 опыта *Купле*, *Боссю* и *Дюбуа* надъ движеніемъ воды въ трубахъ, *Прони* нашелъ для a и b слѣдующія значенія (за единицу длины принимается *метръ*, а за единицу вѣса—*килограммъ*):

$$a = 0{,}0000173314, \quad b = 0{,}0003482599 \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Такъ какъ составленная Прони формула, для движенія воды въ трубѣ, не принимала во вниманіе сжатія струи при входѣ ея въ трубу, то найденныя, при помощи этой формулы,

---

*) Prôny. Recherches physico-mathématique sur le mouvement des eaux courantes. 1804.

**) Coulomb. Mémoires de l'Institut. T. III.

значенія для a и b не вполнѣ точны. *Эйтельвейнъ*, принявъ во вниманіе это сжатіе, нашелъ для a и b слѣдующія значенія:

$$a = 0{,}0000223579,\ b = 0{,}000280318\ .\ .\ .\ . \quad (61)$$

Д'Обюиссонъ для этихъ коэффиціентовъ даетъ:

$$a = 0{,}0000188,\ b = 0{,}000343\ .\ .\ .\ .\ . \quad (62)$$

Вейсбахъ, присоединивъ къ указаннымъ 51 опытамъ еще одинъ опытъ *Геймара*, помѣщенный въ «Annales des Mines» за 1829 г. и относящійся къ случаю, когда труба имѣла 10,159 парижскихъ дюймовъ въ діаметрѣ, между тѣмъ какъ при опытахъ Купле, Боссю и Дюбуа испытываемыя трубы имѣли діаметръ не большій 5 дюймовъ *), нашелъ для a и b значенія **):

$$a = 0{,}00005729,\ b = 0{,}00023157\ .\ .\ .\ .\ . \quad (63)$$

Дюпюи ***), имѣя въ виду упростить формулы и тѣмъ облегчить приложеніе ихъ къ рѣшенію практическихъ вопросовъ, совѣтуетъ, въ случаяхъ когда скорость u не особенно мала, принимать

$$a = 0 \ \text{ и } \ b = 0{,}0003855\ .\ .\ .\ .\ . \quad (64)$$

Сенъ-Венанъ ****), вмѣсто функціи $au + bu^2$, предлагаетъ одночленную функцію вида Cu^m, въ которой должно принимать

$$m = \tfrac{12}{7} \ \text{ и } \ C = 0{,}00029557\ .\ .\ .\ .\ . \quad (65)$$

Такую же одночленную функцію предлагаетъ и *Гагенъ* *****), но для m и C, на основаніи опытовъ *Провиса*, сдѣланныхъ въ Англіи, онъ даетъ слѣдующія значенія:

$$m = \tfrac{7}{4} \ \text{ и } \ C = 0{,}0002663\ .\ .\ .\ .\ . \quad (66)$$

*) 1 парижскій дюймъ = 0,02707 метровъ.

**) „Polytechn. Centralblatt" 1840.

***) Traité théorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux. 1854.

****) Formules et tables nouvelles etc. 1851.

*****) Handbuch der Wasserbaukunst. T. I. 1853.

Вейсбахъ *), на основаніи опытовъ французскихъ инженеровъ и одиннадцати своихъ собственныхъ, даетъ, для потери напора на треніе въ трубахъ, формулу:

$$y = \zeta \frac{qs}{A} \cdot \frac{u^2}{2g} \text{ метровъ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

въ которой

$$\zeta = 0{,}003597 + \frac{0{,}0023678}{\sqrt{u}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67 \text{ bis})$$

Наконецъ *Дарси* (Darcy), при устройствѣ имъ водопровода въ г. Дижонѣ, произвелъ до двухъ сотъ весьма тщательныхъ опытовъ надъ движеніемъ воды въ трубахъ изъ различныхъ матеріаловъ. Свинцовыя трубы онъ бралъ отъ 14 до 41 миллиметра въ діаметрѣ и длиною до 50 метровъ; чугунныя же трубы, при длинѣ до 100 метровъ, имѣли діаметръ отъ 12 миллиметровъ до 50 сантиметровъ. При помощи такихъ опытовъ Дарси убѣдился, что треніе воды въ трубахъ не зависитъ отъ величины давленія на стѣнки, что оно пропорціонально трущейся поверхности и зависитъ отъ свойствъ этой поверхности и рода матеріала, изъ котораго сдѣлана труба. Это послѣднее обстоятельство обнаружилось и при опытахъ Вейсбаха, которые показали, что деревянныя трубы, при равенствѣ обстоятельствъ, даютъ треніе въ 1,75 разъ бо̀льшее, нежели металлическія. Изъ опытовъ же Дарси оказалось, что чугунныя трубы, бывшія долгое время въ употребленіи, стѣнки которыхъ покрыты ржавчиною и осадками воды, даютъ треніе въ два раза бо̀льшее новыхъ трубъ. Желѣзныя асфальтированныя трубы даютъ расходъ почти на 30% бо̀льшій (слѣдов., меньшее треніе), нежели такого же діаметра и длины новыя чугунныя трубы.

Изъ своихъ опытовъ Дарси заключилъ, что, при опредѣленіи потери напора на треніе въ трубахъ, можно пользоваться формулою

$$y = (au + bu^2) \frac{qs}{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

но коэффиціенты a и b должно разсматривать какъ количества, зависящія отъ діаметра d трубы. Для этихъ коэффиціентовъ

*) Die Experimental-Hydraulik.

Дарси даетъ слѣдующія значенія, для трубъ уже бывшихъ въ употребленіи:

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}000032 + \frac{0{,}00000001504}{d^2} \\ b &= 0{,}000443 + \frac{0{,}0000124}{d} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68 \text{ bis})$$

Для новыхъ трубъ коэффиціенты эти должно уменьшить въ два раза.

Для трубъ, бывшихъ въ употребленіи, при средней скорости движенія воды въ нихъ, не меньшей 0,10 метра, Дарси даетъ для a и b еще и другія значенія, приводящія къ болѣе удобной формулѣ, а именно

$$a = 0 \quad \text{и} \quad b = 0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{d} \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Въ формулахъ (68) и (68 bis) d обозначаетъ діаметръ трубы, выраженный въ метрахъ.

Въ случаяхъ, когда не требуется большой точности, для упрощенія формулъ можно брать

$$a = 0 \quad \text{и} \quad b = 0{,}000625 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69 \text{ bis})$$

такъ какъ взятое такимъ образомъ значеніе для b будетъ среднее изъ значеній, какія могутъ встрѣчаться. Дѣйствительно, случаи, когда діаметръ водопроводной трубы болѣе 0,5 и менѣе 0,03 метра, должно считать исключительными; для этихъ же крайнихъ значеній діаметра коэффиціентъ b равенъ числамъ 0,000520 и 0,000723, среднее значеніе которыхъ есть 0,000622.

63. *Примѣненіе формулъ Дарси къ рѣшенію численныхъ вопросовъ.* Выше было указано, что въ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется большой точности, можно пользоваться, при рѣшеніи вопросовъ о движеніи воды въ трубахъ, слѣдующими формулами:

$$\frac{A}{q} i = \frac{d}{4} i = 0{,}000625 u^2 \quad \text{и} \quad Q = \frac{\pi d^2}{4} . u \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

изъ которыхъ, опредѣленіе какихъ-либо двухъ неизвѣстныхъ изъ четырехъ количествъ Q, u, d и i, по остальнымъ даннымъ, весьма удобно совершается помощью логариѳмическихъ таблицъ.

Въ случаяхъ же, требующихъ бóльшей точности, придется вмѣсто постояннаго коэффиціента 0,000625 взять коэффиціентъ вида

$$\alpha + \frac{\beta}{d}$$

гдѣ $\alpha = 0{,}000507$ и $\beta = 0{,}00001294$,

но при этомъ рѣшеніе численныхъ вопросовъ, въ особенности въ тѣхъ случаяхъ, когда діаметръ d находится въ числѣ неизвѣстныхъ количествъ, значительно усложняется.

Для облегченія вычисленій мы помѣщаемъ ниже таблицу, составленную для формулъ

$$\frac{d}{4}\,i = \left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right)u^2 \quad \text{и} \quad Q = \frac{\pi d^2}{4}\,u \;.\;\;.\;\;.\;\;. \quad (71)$$

принимая метръ за единицу длины.

Таблица для формулъ Дарси, относящаяся съ движенію воды въ трубахъ *).

Діаметръ d трубы въ метр. 1.	Площадь $\frac{\pi d^2}{4}$ сѣченія. 2.	$\alpha + \frac{\beta}{d}$ увеличенное въ 1000 разъ. 3.	$\frac{i}{Q^2}$ 4.	$\frac{i}{Q^2}\,d^4$ 5.
0,010	0,0000785	1,801	1,16790000	1,167900
11	950	683	67779000	0,992352
12	0,0001131	585	41314000	856787
13	1327	502	26239000	749412
14	1539	431	17257000	662945
15	1769	370	11696000	592110
16	2011	316	8136800	533253
17	2270	268	5791800	483737
18	2545	206	4207000	441634
19	2835	188	3111300	405468
20	3142	154	2338500	391794
21	3464	123	1783400	346838
22	3801	090	1378000	322805
23	4155	070	1077600	301556
24	4524	046	851970	282662
25	4909	025	680350	265762
26	5309	005	548340	250578
27	5726	0,986	445710	236869
28	6158	969	365150	224442
29	6605	953	301350	213139
30	7069	938	250400	202842

*) Столбцы 1, 2, 3 и 4 заимствованы изъ Гидравлики Бресса.

1.	2.	3.	4.	5.
0,032	0,0008042	0,911	176130	0,184686
34	9079	888	126680	169287
36	0,0010179	867	92919	156070
38	1134	848	69361	144627
40	1257	830	52592	134636
42	1385	815	40443	125846
44	1521	799	31499	118061
46	1662	788	24819	111126
48	1810	777	19763	104910
50	1963	766	15891	0,099319
52	2124	756	12891	94254
54	2290	747	10544	89657
56	2463	738	8690	85462
58	2642	730	7213	81626
60	2827	723	6026	78097
62	3019	716	5066	74857
64	3217	709	4283	71857
66	3421	703	3640	69068
68	3632	697	3110	66496
70	3848	692	2669	64083
72	4072	687	2301	61837
74	4301	682	1993	59763
76	4536	677	1732	57784
78	4778	673	1511	55930
80	0,005027	0,669	1323,0	0,054190
85	5675	657	963,4	50290
90	6362	651	714,7	48663
95	7088	643	539,0	43902
0,100	7854	636	412,7	41270
105	8659	630	320,2	38921
110	9503	625	251,5	36822
115	0,010387	620	199,7	34928
120	11310	615	160,2	33227
125	12272	611	129,7	31665
130	1327	607	105,9	30246
135	1431	603	87,18	28957
140	1539	599	72,27	27763
145	1651	596	60,32	26665
150	1767	593	50,66	0,025647
16	2011	588	36,36	23829
17	2270	583	26,63	22242
18	2545	579	19,87	20907
19	2835	575	15,06	19626
20	3142	572	11,59	18544
21	3464	569	9,028	17557
22	3801	566	7,119	16638
23	4155	563	5,675	15881
24	4524	561	4,568	15155
25	4909	559	3,710	14492
26	5309	557	3,039	13887
27	5726	555	2,508	13319
28	6158	553	2,084	12809
29	6605	552	1,744	12335
30	7069	550	468	11891

1.	2.	3.	4.	5.
0,31	0,07548	0,549	1,243	0,011479
32	8042	547	058	11094
33	8553	546	0,9050	10733
34	9079	545	7779	10395
35	9621	544	6716	10078
36	0,10179	543	5823	0,009780
37	10752	542	5068	9498
38	11341	541	4428	9233
39	11946	540	3882	8981
40	1257	539	3415	8742
41	1320	539	3014	8517
42	1385	538	2668	8302
43	1452	537	2369	8096
44	1521	536	2109	7905
45	1590	536	1883	7722
46	1662	535	1685	7544
47	1735	535	1511	7373
48	1810	534	1359	7214
49	1886	533	1225	7062
50	1963	533	1106	6912
51	2043	532	1001	6772
52	2124	532	0,09072	6635
53	2206	531	8240	6487
54	2290	531	7498	6376
55	2376	531	6836	6255
56	2463	530	6242	6160
57	2552	530	5709	6026
58	2642	529	5229	5917
59	2734	529	4798	5814
60	2827	529	4408	5713
61	2922	528	4055	5614
62	3019	528	3736	5520
63	3117	528	3447	5430
64	3217	527	3184	5342
65	3318	527	2945	5257
66	3421	527	2727	5174
67	3526	526	2528	5094
68	3632	526	2346	5016
69	3739	526	2180	4941
70	3848	525	2027	4867
71	3959	525	1888	4798
72	4072	525	1759	4727
73	4185	525	1641	4660
74	4301	524	1533	4597
75	4418	524	1433	4534
76	4536	524	1340	4470
77	4657	524	1255	4412
78	4778	524	1176	4353
79	4902	523	1103	4296
80	5027	523	1035	4239
0,810	0,5153	0,523	0,009726	0,004187
82	5281	523	9144	4134
83	5411	523	8603	4084
84	5542	522	8100	4033

1.	2.	3.	4.	5.
0,85	0,5675	0,522	0,007632	0,003984
86	5809	522	7196	3936
87	5945	522	6790	3890
88	6082	522	6410	3844
89	6221	522	6056	3800
90	6362	521	5726	3757
91	6504	521	5416	3714
92	6648	521	5127	3673
93	6793	521	4855	3632
94	6940	521	4601	3592
95	7088	521	4363	3554
96	7238	520	4139	3515
97	7390	520	3929	3478
98	7543	520	3732	3442
99	7698	520	3546	3405
1,000	0,7854	0,520	0,003372	0,003372
1,05	8659	519	2639	3208
1,10	9503	519	2089	3059
1,15	1,0387	518	1671	2923
1,20	1,1310	518	1349	2785

Слѣдующіе численные примѣры уяснятъ употребленіе предъидущей таблицы.

Примѣръ первый. Даны $d = 0,15$ метр. и $u = 0,3$ метр.; найти Q и i.

Изъ таблицы, для даннаго значенія d, находимъ

$$\frac{\pi d^2}{4} = 0,01767;$$

слѣдовательно,

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} u = 0,01767 \,.\, 0,3 = 0,005301 \text{ куб. метр.}$$

Изъ таблицы же, для даннаго значенія d, находимъ

$$\frac{i}{Q^2} = 50,66,$$

слѣдовательно, $i = 50,66 \,.\, (0,005301)^2 = 0,001423$.

Еслибы данное значеніе для d не находилось въ таблицѣ, тогда расходъ Q лучше было бы искать непосредственно по формулѣ

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \,.\, u,$$

при помощи логариѳмовъ, а неизвѣстную i — по формулѣ

$$i = \frac{4}{d}\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right) u^2.$$

или же опредѣлить $\frac{i}{Q^2}$, при помощи таблицы, интерполированіемъ, а затѣмъ уже найти и i. Имѣя въ виду неточность значеній, опредѣленныхъ опытомъ коэффиціентовъ α и β, входящихъ въ формулы, нѣтъ никакой надобности, прибѣгая къ интерполированію, пользоваться *параболическимъ* интерполированіемъ, а всегда можно ограничиться интерполированіемъ *линейнымъ*.

Для примѣра положимъ, что даны $u = 0,3$ и $d = 0,157$. Выписывая изъ таблицы значенія для d непосредственно бóльшее и меньшее даннаго и рядомъ съ ними числа, имъ соотвѣтствующія изъ столбца 2, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} 0,16 \;\ldots\; 0,02011 \\ 0,157 \;\ldots\; x \\ 0,15 \;\ldots\; 0,01767 \end{array}\right\} \text{откуда} \left\{\begin{array}{l} 0,01 \;\ldots\; 0,00244 \\ 0,003 \;\ldots\; 0,02011 - x \end{array}\right.$$

слѣдовательно,

$$0,02011 - x : 0,00244 = 0,003 : 0,01,$$

откуда

$$x = \frac{\pi d^2}{4} = 0,02011 - \frac{0,00244 \,.\, 0,003}{0,01} = 0,019378.$$

Поступая точно такъ же, для опредѣленія искомаго числа столбца 4, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} 0,16 \;\ldots\; 36,36 \\ 0,157 \;\ldots\; x \\ 0,15 \;\ldots\; 50,66 \end{array}\right\} \text{откуда} \left\{\begin{array}{l} 0,01 \;\ldots\; -14,30 \\ 0,003 \;\ldots\; -(x - 36,36) \end{array}\right.$$

$$x - 36,36 : 14,30 = 0,003 : 0,01,$$

а потому $$x = \frac{i}{Q^2} = 36,36 + \frac{14,30 \,.\, 0,003}{0,01} = 40,65.$$

Опредѣливъ такимъ образомъ числа столбцовъ 2 и 4, соотвѣтствующія заданному діаметру, не трудно будетъ рѣшить предложенную задачу, то-есть найти Q и i.

Примѣръ второй. Дано $Q = 0{,}0097$ куб. метр. и $d = 0{,}24$ метр.; найти u и i.

По заданному значенію для d, изъ таблицы находимъ

$$\frac{i}{Q^2} = 4{,}568,$$

слѣдовательно, $i = 4{,}568\ (0{,}0087)^2 = 0{,}000346;$

изъ таблицы же имѣемъ

$$\frac{\pi d^2}{4} = 0{,}04524,$$

а потому $u = \frac{0{,}0087}{0{,}04524} = 0{,}192$ метр.

Примѣръ третій. Дано $d = 0{,}72$ и $i = 0{,}0001$; найти Q и u. По даннымъ d и i составляемъ произведеніе

$$\frac{d}{4}\, i = \frac{0{,}72}{4} \,.\, 0{,}0001 = 0{,}000018,$$

затѣмъ въ 3 столбцѣ отыскиваемъ значеніе $\alpha + \frac{\beta}{d}$; значеніе это будетъ 0,000525, а потому

$$u = \sqrt{\frac{di}{4\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right)}} = \sqrt{\frac{0{,}000018}{0{,}000525}} = 0{,}185 \text{ метр.}$$

Наконецъ

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\, u = 0{,}4072 \,.\, 0{,}185 = 0{,}075332 \text{ куб. метр.}$$

Примѣръ четвертый. Дано $u = 0{,}9$ и $Q = 0{,}105$; найти d и i. По даннымъ значеніямъ для Q и u опредѣляемъ

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{Q}{u} = \frac{0{,}105}{0.9} = 0{,}11667,$$

откуда $d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\, 0{,}11667} = 0{,}3863.$

Зная діаметръ d, ищемъ интерполированіемъ $\frac{i}{Q^2}$:

$$\left.\begin{array}{lll} 0{,}39 & \ldots & 0{,}3882 \\ 0{,}3863 & \ldots & x \\ 0{,}38 & \ldots & 0{,}4428 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}0037 \ldots -(x-0{,}3882) \\ 0{,}01 \quad \ldots - 0{,}0546 \end{array}$$

откуда $\quad x = \frac{i}{Q^2} 0{,}3882 + \frac{0{,}0546 \,.\, 0{,}0037}{0{,}01} = 0{,}4084;$

слѣдовательно, $\quad i = 0{,}4084 \,.\, (0{,}105)^2 = 0{,}0045.$

Впрочемъ, можно было было бы найти i и иначе, а именно сначала опредѣлить $\alpha + \frac{\beta}{d}$, а затѣмъ искать i по формулѣ

$$i = \frac{4}{d}\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right) u^2.$$

Примѣръ пятый. Дано $u = 1$ метру и $i = 0{,}0025$; найти d и Q. По данному u находимъ

$$\frac{d^4}{Q^2} = \left(\frac{4}{\pi u}\right)^2 = \left(\frac{3{,}141593}{4}\right)^2 = 1{,}12838,$$

затѣмъ опредѣляемъ произведеніе

$$\frac{i}{Q^2} d^4 = 0{,}0025 \,.\, 1{,}12838 = 0{,}0028209,$$

и, при помощи 5 столбца, совершаемъ интерполированіе:

$$\left.\begin{array}{rll} 1{,}15 & \ldots & 0{,}002923 \\ d & \ldots & 0{,}0028209 \\ 1{,}20 & \ldots & 0{,}002785 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}05 \ldots\ldots 0{,}000138 \\ -(1{,}20 - d) \ldots 0{,}0000359 \end{array}$$

слѣдовательно,

$$d = 1{,}20 - \frac{5 \,.\, 359}{138000} = 1{,}187 \text{ метр.}$$

Имѣя значенія діаметра, расходъ Q найдемъ по формулѣ

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} u$$

безъ всякихъ затрудненій.

Примѣръ шестой. Дано $Q = 0{,}04$ и $i = 0{,}0004$; найти u и d. Зная i и Q, составляемъ дробь

$$\frac{i}{Q^2} = \frac{0{,}0004}{(0{,}04)^2} = 0{,}25,$$

затѣмъ, при помощи столбца 4 совершаемъ интерполированіе:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}42 \;.\;.\;.\; 0{,}2668 \\ \quad d \;.\;.\;.\; 0{,}2500 \\ 0{,}43 \;.\;.\;.\; 0{,}2369 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}01 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0{,}0299 \\ -(0{,}43-d)\;.\;.\; 0{,}0131 \end{array}$$

слѣдовательно,

$$d = 0{,}43 - \frac{131}{29900} = 0{,}4256 \text{ метр.}$$

Скорость же u найдется по формулѣ

$$u = \frac{4Q}{\pi d^2} = 0{,}2812 \text{ метр.}$$

Предъидущіе шесть примѣровъ исчерпываютъ всѣ задачи, какія только могутъ встрѣтиться, при опредѣленіи двухъ неизвѣстныхъ изъ четырехъ количествъ Q, i, d и u.

Дальнѣйшія изслѣдованія, касающіяся движенія воды въ трубахъ, мы относимъ къ статьѣ о движеніи воды въ водопроводной сѣти, а теперь укажемъ на формулы французскаго инженера *М. Леви* *) для средней скорости воды въ трубахъ, выведенныя имъ изъ весьма строгаго анализа, но принимающаго въ основаніе, относительно гидравлическаго тренія, нѣкоторое предложеніе, въ истинности котораго позволительно сомнѣваться. Предложеніе это было высказано *Базеномъ*, сотрудникомъ *Дарси*, въ его опытныхъ изслѣдованіяхъ о движеніи воды. Продолжая, послѣ смерти Дарси, его опыты, Базенъ пришелъ къ заключенію, что гидравлическое треніе пропорціонально не только первой степени относительной скорости, но и первой степени *абсолютной скорости* той частицы жидкости, движеніе которой разсматриваемъ.

М. Леви, принявъ въ основаніе это предложеніе, приведенъ былъ къ слѣдующей формулѣ для опредѣленія средней скорости U воды въ трубахъ

$$U = \alpha \sqrt{ri(1+\beta)\sqrt{r}}.$$

Опредѣляя же коэффиціенты α и β въ этой формулѣ, на основаніи результатовъ опытовъ Дарси и другихъ, Леви окончательно далъ слѣдущія формулы:

---

*) Annales de Ponts et Chaussées. 1877; M. Lévy. Théorie d'un courant liguide à filets rectilignes et parallèles etc.

для трубъ бывшихъ въ употребленіи

$$U = 20{,}5\sqrt{ri\,(1+3\sqrt{r})} \text{ метровъ},$$

а для новыхъ трубъ

$$U = 36{,}4\sqrt{ri\,(1+\sqrt{r})} \text{ метровъ},$$

гдѣ r есть радіусъ трубы въ метрахъ, а i потерянный на треніе напоръ, на каждомъ метрѣ длины трубы.

Для устраненія могущихъ возникнуть затрудненій при опредѣленіи по формулѣ Леви радіуса трубы по даннымъ значеніямъ для скорости U и для напора i или же по даннымъ значеніямъ для этого же напора и расхода воды Q, мы помѣщаемъ ниже таблицу, содержащую значенія количествъ

$$20{,}5\sqrt{r\,(1+3\sqrt{r})} \quad \text{и} \quad \pi r^2 \,.\, 20{,}5\sqrt{r\,(1+3\sqrt{r})}$$

соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ радіуса r.

Таблица для формулы Леви.

Радіусъ r въ метрахъ.	$\alpha = 20{,}5\sqrt{r(1+3\sqrt{r})}$.	$\pi r^2 \,.\, \alpha$.
0,005	1,578	0,00012308
0,010	2,337	0,00073382
0,015	2,932	0,00207292
0,020	3,444	0,00432911
0,025	3,915	0,00768514
0,030	4,428	0,01251795
0,035	4,776	0,01837805
0,040	5,116	0,02596431
0,045	5,556	0,03533535
0,050	5,804	0,04557562
0,075	7,564	0,13466341
0,100	9,040	0,28399160
0,125	10,399	0,51045571
0,150	11,664	0,82446980
0,175	12,874	1,23852042
0,200	14,022	1,76204658
0,225	15,049	2,39346820
0,250	16,195	3,17980727
0,300	18,245	5,15855603
0,350	20,192	7,77079024
0,400	21,976	11,04632430
0,450	23,802	15,14216594
0,500	25,604	20,24930478

Движеніе воды въ каналахъ и рѣкахъ.

Случай равномѣрнаго движенія.

64. При движеніи воды въ открытыхъ каналахъ и рѣкахъ, еще въ большей степени, нежели при движеніи въ трубахъ, должны обнаруживаться обстоятельства, нарушающія правильность этого движенія, какъ отъ большей неровности стѣнокъ (дна и береговъ), направляющихъ движеніе, такъ и отъ измѣненій давленія на свободной поверхности, происходящихъ отъ колебаній и движенія атмосфернаго воздуха. Несмотря однако на существованіе множества такихъ причинъ, возмущающихъ правильность движенія отдѣльныхъ частицъ воды, очевидно, что устанавливается нѣкоторое среднее движеніе, въ каждой точкѣ пространства занятаго движущеюся жидкостью, мало отличающееся, по крайнѣй мѣрѣ по направленію, отъ того движенія, какое этой точкѣ соотвѣтствовало бы при отсутствіи возмущающихъ причинъ; такъ какъ направляющее дѣйствіе стѣнокъ (дна и береговъ) для всей массы потока сохраняется въ полной силѣ, хотя и нарушается для отдѣльныхъ струекъ. Можно, поэтому, путемъ теоретическихъ соображеній, придти къ нѣкоторымъ выводамъ, согласнымъ въ общихъ чертахъ съ дѣйствительнымъ явленіемъ движенія, вводя въ вычисленія не истинныя скорости отдѣльныхъ частицъ, а *среднія—мѣстныя*, т.-е. среднія, соотвѣтствующія даннымъ мѣстамъ пространства.

Посмотримъ теперь, къ какимъ результатамъ приведутъ насъ уравненія движенія Навье, если примѣнимъ ихъ къ опредѣленію обстоятельствъ средняго движенія воды въ каналѣ, или въ рѣкѣ.

Положимъ, что имѣемъ прямолинейный каналъ съ плоскими берегами и плоскимъ дномъ, поперечныя сѣченія котораго одинаковы по величинѣ. Пусть a будетъ уголъ наклоненія дна канала къ горизонту. Сверхъ того, положимъ, что среднее движеніе воды въ разсматриваемомъ каналѣ есть движеніе установившееся. При такихъ предположеніяхъ, нужно это среднее движеніе разсматривать какъ совершающееся прямолинейными и параллельными струйками, а при этомъ давленіе въ каждомъ поперечномъ сѣченіи (*живомъ сѣченіи*) будетъ распредѣляться по законамъ Гидростатики, и пересѣченія сводной поверхности съ поперечными сѣченіями будутъ прямыя, горизонтальныя линіи. Направимъ ось y по одной изъ этихъ послѣднихъ прямыхъ, ось x на свободной поверхности по направленію общаго средняго движенія и ось z въ вертикальной плоскости сверху внизъ, тогда въ уравненіяхъ Навье должно принять (см. № 31 уравн. 48):

$$X = g\sin\alpha,\ \ Y = 0,\ \ Z = g\cos\alpha,\ \ v = w = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

а такъ какъ, въ то же время, условіе неразрывности массы жидкости даетъ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, то указанныя уравненія принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \ \text{ и } \ \Delta\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (a)$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій даетъ

$$p = p_0 + \Delta\cos\alpha \,.\, z \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (b)$$

гдѣ p_0 есть атмосферное давленіе, дѣйствующее на свободной поверхности. Дифференцируя же уравненіе (b) по x, получаемъ $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$; поэтому, предполагая, что атмосферное давленіе на всемъ протяженіи свободной поверхности одинаково, должно принять $\frac{\partial p_0}{\partial x}$, а слѣдов. и $\frac{\partial p}{\partial x}$ равными нулю; такъ что первое изъ уравненій группы (a), принимаетъ видъ

$$\Delta\sin\alpha + B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Наконецъ упростимъ рѣшеніе вопроса еще однимъ предположеніемъ, что ширина канала безконечно велика, или, что собственное одно и то же, что масса воды испытываетъ сопротивленіе только отъ дна канала и отъ воздуха, соприкасающагося свободной поверхности. При такомъ предположеніи скорость u должно разсматривать какъ независимую отъ координаты y, т.-е. какъ функцію только одной перемѣнной z. Слѣдов. окончательно, для опредѣленія этой скорости, получаемъ уравненіе:

$$\Delta i + B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

въ которомъ $i = \sin\alpha$, есть *уклонъ* или *паденіе* дна канала. Интегрируя это уравненіе, получаемъ:

$$u = V + Cz - \frac{\Delta i}{2B}z^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Здѣсь V и C суть постоянныя, вошедшія при интегрированіи изъ коихъ V, очевидно, представляетъ скорость движенія частицъ, находящихся на свободной поверхности. Пусть h обозначаетъ повсюду одинаковую глубину канала и W скорость частицъ, движущихся по дну; тогда изъ полѣдняго уравненія получаемъ:

$$W = V + Ch - \frac{\Delta i}{2B}h^2,$$

откуда $$C = \frac{\Delta ih}{2B} - \frac{V-W}{h},$$

слѣдовательно, $$u = V + \left(\frac{\Delta hi}{2B} - \frac{V-W}{h}\right)z - \frac{\Delta i}{2B}z^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Кромѣ этого общаго уравненія для всѣхъ частицъ воды, существуютъ еще особыя уравненія для частицъ, лежащихъ на днѣ и на свободной поверхности. Для полученія этихъ послѣднихъ уравненій, обозначимъ послѣдовательно, чрезъ $f(V)$ и $F(W)$ сопротивленія, отнесенныя къ единицѣ площади свободной поверхности и поверхности дна и примемъ въ уравненіяхъ (c) № 32 $\cos(ny) = 0$ и $\cos(nz) = \pm 1$ (верхній знакъ для свободной поверхности и нижній для поверхности дна), тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для свободной поверхности} & p_{nz} = -f(V) = -B\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} \\ \text{для поверхности дна} & p_{nz} = -F(W) = B\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} \end{array}\right\} \ldots \text{(e)}$$

Но изъ уравненія (d) слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\Delta i}{2B}h-\frac{V-W}{h}-\frac{\Delta}{B}z;$$

слѣдовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\frac{\Delta i}{2B}h-\frac{V-W}{h} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_h=-\left(\frac{\Delta i}{2B}h+\frac{V-W}{h}\right),$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} f(V)&=\tfrac{1}{2}\Delta ih-B\frac{V-W}{h}\\ F(W)&=\tfrac{1}{2}\Delta ih+B\frac{V-W}{h}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(f)}$$

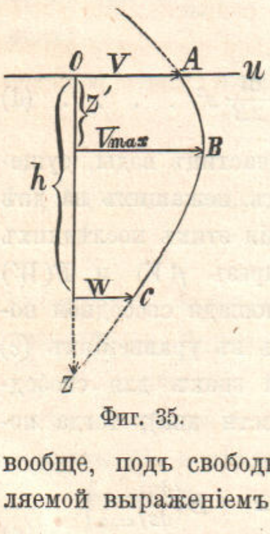
Откуда

$$F(W)+f(V)=\Delta ih.$$

Такимъ образомъ выраженіе для скорости u можетъ быть представлено еще и въ слѣдующемъ видѣ:

$$u=V+\frac{f}{B}z-\frac{F+f}{2Bh}\cdot z^2.$$

65. Несмотря на то, что формулы предъидущаго нумера относятся къ случаю канала безконечной ширины, выводимыя изъ нихъ слѣдствія съ достаточною точностью оправдываются опытомъ; а этимъ доказывается, что сопротивленіе движенію отъ береговъ канала или рѣки незначительно въ сравненіи съ сопротивленіемъ отъ дна, если только ширина канала или рѣки не особенно мала.



Фиг. 35.

Если въ уравненіи (g) будемъ разсматривать глубину z погруженія частицы подъ свободною поверхностью какъ абсциссу, а среднюю скорость u какъ ординату, то уравненіе это представитъ намъ уравненіе параболы ABC (фиг. 35), вершина B которой находится, говоря вообще, подъ свободною поверхностью на глубинѣ z', опредѣляемой выраженіемъ:

$$z'=\frac{F+f}{f}h=0{,}5h-\frac{B}{\Delta i}\cdot\frac{V-W}{h} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(h)}$$

а этой послѣдней глубинѣ соотвѣтствуетъ наибольшая скорость V_{max}, которая и найдется, если въ выраженіи (g) внесемъ на мѣсто z значеніе количества z'. Сдѣлавъ это на самомъ дѣлѣ, получаемъ:

$$V_{max.} = V + \frac{f^2}{F+f} \cdot \frac{h}{2B} = V + \frac{B}{2\Delta i}\left(\frac{\Delta ih}{2B} - \frac{V-W}{h}\right)^2 \quad . \quad . \quad (i)$$

Средняя скорость U частицъ, лежащихъ на одной вертикали, которая, въ настоящемъ случаѣ, есть и среднею скоростью всего потока, найдется изъ выраженія:

$$U = \frac{1}{h}\int_0^h udz = V - \frac{F-2f}{6B}h = \frac{V+W}{2} + \frac{\Delta i}{12B}h^2 \quad . \quad . \quad (j)$$

Для скорости на глубинѣ $z = 0{,}5h$ находимъ:

$$U_{0,5h} = \frac{V+W}{2} + \frac{\Delta ih^2}{8B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Исключая изъ уравненій (j) и (k) количество $\frac{\Delta ih^2}{B}$ получаемъ, уравненіе:

$$U = \frac{4U_{0,5h} + V + W}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Это послѣднее уравненіе, независящее отъ сопротивленій f и F, показываетъ, что среднюю скорость на каждой вертикали можно найти помощью *трехъ наблюденій*, а именно нужно опредѣлить скорости V, W и $U_{0,5h}$.

Назовемъ еще чрезъ z'' ту глубину, на которой находится частица воды, движущаяся со скоростью, равною средней скорости U всего потока. Эта глубина найдется изъ уравненія (g), когда въ немъ на мѣсто u внесемъ значеніе U изъ уравненія j. Сдѣлавъ это, получимъ для опредѣленія z'' слѣдующее квадратное уравненіе

$$\frac{F+f}{2h}z''^2 - f \cdot z'' = \frac{F-2f}{6}h,$$

рѣшая которое найдемъ:

$$z'' = \frac{h}{F+f}\left[f \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}(F^2+f^2-F \cdot f)}\right] \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (m)$$

Вытекающій изъ предъидущихъ формулъ законъ распредѣленія скоростей на разныхъ глубинахъ, слѣдуя ординатамъ параболы, подтверждается многими наблюденіями, какъ напр. Дефонтена надъ теченіемъ воды въ Рейнѣ и Буало надъ теченіемъ въ искуственныхъ каналахъ и желобахъ *), также обширными наблюденіямъ надъ движеніемъ воды въ рѣкѣ Миссисиппи, сдѣланными американскими инженерами Гумфрейсомъ и Абботомъ **) и изслѣдованіями надъ теченіемъ воды въ Рейнѣ близъ Базеля, выполненными особою международною коммиссіею въ 1867 г. ***).

Глубина z', на которой имѣетъ мѣсто наибольшая скорость теченія, какъ показываетъ формула (h), уменьшается по мѣрѣ уменьшенія сопротивленія f на свободной поверхности и обращается въ нуль, когда это сопротивленіе дѣлается равнымъ нулю. Сопротивленіе же f можетъ равняться нулю, только при вѣтрѣ дующемъ по теченію со скоростью равною скорости движенія воды на поверхности.

При вѣтрѣ дующемъ по теченію со скоростью большею скорости на поверхности, количество, f а слѣдов. и z', дѣлаются отрицательными. Въ этомъ случаѣ вершина параболы располагается выше свободной поверхоости, а наибольшая скорость будетъ на этой поверхности. При существованіи вѣтра противнаго теченію воды, z' будетъ величиною положительною, тѣмъ большею, чѣмъ сильнѣе будетъ вѣтеръ. Если при этомъ скорость V на поверхности сдѣлается равною скорости W на днѣ, то z' обратится въ $0{,}5h$. Всѣ эти заключенія относительно положенія частицъ, имѣющихъ наибольшую скорость, оправдываются до извѣстной степени наблюденіями Дефонтена на Рейнѣ, Рокура на Невѣ, Геннока на притокѣ Рейна близъ Страсбурга и Гумфрейса и Аббота на Миссиссиппи. Буало, которому Геннокъ сообщалъ результаты своихъ наблюденій, выводитъ изъ нихъ, что при отсутствіи вѣтра, или же при слабомъ вѣтрѣ по тече-

*) Boileau. Traité de la mesure des eaux courantes etc. Paris. 1854.

**) H. Grebenau. Theorie der Bevegung des Wassers etc. München. 1867.

***) Его-же. Die internationale Rheinstrom-Messung bei Basel etc. München. 1873.

ніи, глубина $z' = 0{,}2h$, а слѣдов., въ такомъ случаѣ, какъ это видно изъ формулы (h), сопротивленіе f на свободной поверхности равняется только одной четверти сопротивленія F на днѣ. Гумфрейсъ и Абботъ для глубины z' даютъ слѣдующую эмпирическую формулу:

$$z' = (0{,}317 + 0{,}06k)r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{n})$$

въ которой r есть такъ-называемый *средній радіусъ сѣченія*, т.-е. отношеніе площади живого сѣченія къ подводному, или мокрому периметру (въ разсматриваемомъ нами случаѣ безконечно-широкаго канала $r = h$), а k есть нѣкоторый коэффиціентъ опредѣляющій силу вѣтра. Коэффиціентъ этотъ должно принимать равнымъ нулю при отсутствіи вѣтра и равнымъ 10 при уранѣ, разсматривая его притомъ какъ положительное количество въ случаѣ вѣтра по теченію и какъ отрицательное въ противномъ случаѣ. Еслибы численныя значенія коэффиціента k въ этой формулѣ были даны болѣе обстоятельно, то чрезъ сличеніе этой формулы съ формулою (h), можно было бы вывести зависимость отъ силы вѣтра отношенія сопротивленій f и F.

Относительно глубины z'', на которой находятся частицы, движущіяся со скоростью равною средней скорости U всего потока, замѣтимъ, что при $f = 0$, формула наша (m) даетъ

$$z'' = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \,.\, h = 0{,}577h.$$

Если же, согласно Буало, примемъ $z' = 0{,}2h$, а слѣдоват., $f = 0{,}25F$, то получимъ $z'' = 0{,}616h$. Такимъ образомъ видимъ, что при слабомъ вѣтрѣ по теченію, *частицы воды, обладающія среднею скоростью всего потока, движутся на глубинѣ весьма близкой къ* $0{,}6h$.

Еслибы видъ функцій $f(V)$ и $F(W)$ былъ намъ съ точностью извѣстенъ, то изъ уравненій (f) можно было бы опредѣлить V и W въ зависимости отъ паденія i и глубины h канала, а затѣмъ, по формулѣ (j), найти и среднюю скорость U всего сѣченія.

66. Относительно вида функціи $F(W)$ почти всѣ гидравлики согласны въ томъ, что для нее можно принять

$$\frac{F(W)}{\Delta} = aW + bW^2;$$

что же касается функціи $f(V)$, то очень можетъ быть, что и ее можно представить въ видѣ

$$\frac{f(V)}{\Delta}=\alpha(V-C)+\beta(V-C)^2,$$

гдѣ на C должно смотрѣть какъ на скорость вѣтра дующаго по теченію. Однако при такомъ видѣ для функціи $f(V)$ предъидущія формулы приводятъ къ выраженію для средней скорости U весьма сложному и неудобному для практическихъ приложеній.

Мы будетъ предполагать, что сопротивленіе f пропорціонально сопротивленію F, т.-е. что

$$f(V)=mF(W) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

гдѣ коэффиціентъ m зависитъ отъ состоянія атмосфернаго воздуха.

При такомъ предположеніи, вмѣсто формулы (f), получимъ слѣдующія (замѣняя h на средній радіусъ r):

$$mF=\tfrac{1}{2}\Delta ri-\frac{B}{r}(V-W)$$

$$F=\tfrac{1}{2}\Delta ri+\frac{B}{r}(V-W),$$

изъ которыхъ выводимъ

$$(1+m)F=\Delta ri \quad \text{и} \quad V-W=\frac{1-m}{1+m}\cdot\frac{\Delta ir^2}{2B},$$

или $\quad aW+bW^2=\frac{ri}{1+m} \quad$ и $\quad V-W=\frac{1-m}{1+m}\cdot\frac{\Delta ir^2}{2B}.$

Откуда находимъ

$$W=-\frac{a}{2b}+\sqrt{\frac{ri}{(1+m)b}+\frac{a^2}{4b^2}}$$

$$V=-\frac{a}{2b}+\sqrt{\frac{ri}{(1+m)b}+\frac{a^2}{4b^2}}+\frac{1-m}{1+m}\cdot\frac{\Delta i}{2B}r^2.$$

слѣдов., уравненіе (j) для скорости U доставитъ:

$$U=-\frac{a}{2b}+\sqrt{\frac{ri}{(1+m)b}+\frac{a^2}{4b^2}}+\frac{2-m}{1+m}\cdot\frac{\Delta i}{6B}r^2 \quad . \quad . \quad (p)$$

Принимая въ этой формулѣ

$$\frac{1}{(1+m)b}=\alpha,\ \frac{a}{2b}=\beta \text{ и } \frac{2-m}{1+m}\cdot\frac{1}{6B}=A,$$

окончательно, получимъ слѣдующую формулу

$$U=\sqrt{\alpha ri+\beta^2}-\beta+Ar^2i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

въ которой коэффиціенты α и A, какъ зависящіе отъ m, должны зависѣть отъ состоянія воздуха, а именно должны уменьшаться съ увеличеніемъ сопротивленія на свободной поверхности.

67. Выведенная выше формула (q) заключаетъ въ себѣ формулы, предложенныя многими изъ гидравликовъ для опредѣленія средней скорости теченія воды въ рѣкахъ и каналахъ, такъ что эти послѣднія формулы и могутъ быть выведены изъ нашей, при различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ α, β и A.

Формула (q) совершенно совпадаетъ съ слѣдующею формулою Дюпюи:

$$U=\sqrt{2777{,}92ri+0{,}000625}-0{,}025+41{,}011\cdot\frac{ria}{L} \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которой r и i имѣютъ прежнія значенія, а дробь $\frac{a}{L}$ представляетъ отношеніе площади сѣченія къ ширинѣ канала или рѣки; слѣдоват., дробь эта всегда близка къ r, такъ какъ подводный периметръ всегда близокъ къ ширинѣ; поэтому $\frac{ria}{L}$ можетъ быть принято равнымъ r^2i.

Численныя коэффиціенты въ формулѣ Дюпюи, равно какъ и во всѣхъ ниже помѣщаемыхъ формулахъ, относятся къ случаю, когда за единицу линейной мѣры принимаемъ метръ.

Такъ какъ паденіе i рѣкъ и каналовъ всегда есть нѣкоторая весьма малая дробь, то послѣдній членъ формулы (q), какъ содержащій количество i въ степени бо́льшей нежели первые два члены, можетъ быть отброшенъ и тогда формула приметъ видъ:

$$U=\sqrt{\alpha ri+\beta^2}-\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и совпадетъ съ формулами, предложенными Прони, Жирардомъ, Гагеномъ и Вейсбахомъ, гдѣ, слѣдуя

Прони	$\alpha = 3228,71;$	$\beta = 0,07184,$
по Жирарду	$\alpha = 86563,3;$	$\beta = 5,38,$
„ Гагену	$\alpha = 3687;$	$\beta = 0,1748,$
„ Вейсбаху	$\alpha = 2647,86;$	$\beta = 0,029265,$

Изъ этихъ численныхъ значеній для количества α и β видно, что коэффиціентъ β имѣетъ вообще слабое вліяніе на среднюю скорость теченія, поэтому формулу (2) можно упростить противъ $\beta = 0$ и тогда получимъ формулу вида

$$U = M\sqrt{ri} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

называемую формулою *Шези*, въ которой, слѣдуя Эйтельвейну, $M = 51,57$; слѣдуя Юнгу $M = 46,54$ (для большихъ рѣкъ); по д'Обюиссону $M = 52,78$; по Тайлеру и Довнингу $M = 55,20$; слѣдуя Тадини $M = 50$; слѣдуя Лесли $M = 37,54$ (для малыхъ рѣкъ) и 55,20 (для большихъ); по Невиллю $M = 50,96$ (для рѣкъ съ малою скоростью) и 51,51 (для рѣкъ съ большею скоростью) и наконецъ по Стефенсону $M = 38,1$ (для малыхъ рѣкъ) и 53 (для большихъ).

Если въ формулѣ (q), подобно какъ и во (2), отбросимъ количество β, или, что одно и то же, если сопротивленіе $F(w)$ будемъ выражать формулою bW^2, а не формулою $aW + bW^2$, то получимъ:

$$U = M\sqrt{ri} + Ar^2 i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Эта формула совпадетъ съ формулою, предложенною Еллетомъ безъ вывода, если примемъ

$$M = 84,235 \quad \text{и} \quad A = 69,2921 \times \frac{1}{r}$$

и будетъ разсматривать r не какъ средній радіусъ сѣченія, но какъ наибольшую глубину рѣки. Если въ формулѣ Шези примемъ коэффиціентъ M равнымъ

$$\frac{1}{\sqrt{0,00028 + \frac{0,00035}{r}}},$$

то получимъ слѣдующую формулу Дарси *)

$$U = r\sqrt{\frac{1000i}{0{,}28r + 0{,}35}} \text{ метровъ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

въ которой *Куттеръ* предлагаетъ коэффиціенты 0,4 вмѣсто 0,28 и 0,7 вмѣсто 0,35.

Сверхъ того, *Куттеръ* вмѣстѣ съ *Ганюилле* **) предложили еще слѣдующую формулу:

$$U = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00156}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}\sqrt{ri} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

въ которой n есть коэффиціентъ, опредѣляющій *степень шероховатости* русла, лежащій въ предѣлахъ отъ 0,022 до 0,035.

Сенъ-Венанъ даетъ формулу

$$U = 60{,}238\,(ri)^{\frac{11}{21}} \text{ метровъ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Американскіе инженеры Гумфрейсъ и Абботъ, объ опытахъ которыхъ было упомянуто выше, даютъ слѣдующую эмпирическую формулу:

$$U = \left[\sqrt{0{,}0025b + \sqrt{68{,}72r_1\sqrt{i}}} - 0{,}05b\right]^2 \text{ метр.} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

въ которой $r_1 = \frac{a}{p+L}$ и $b = \frac{0{,}933}{\sqrt{h + 0{,}457}}$, причемъ a, p, L и h обозначаютъ площадь сѣченія, периметръ сѣченія, ширину и глубину рѣки. Въ формулѣ этой члены, содержащіе коэффиціентъ b, имѣютъ слабое вліяніе на окончательные выводы, поэтому вмѣсто формулы (8) можно брать слѣдующую простѣйшую:

$$U = 8{,}28972\sqrt{\frac{a}{p+L}} \cdot (i)^{\frac{1}{4}} \text{ метр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

*) Recherches hydrauliques, entreprises par M. H. Darcy, etc. Paris. 1865.

**) Zeitschrift des österr. Ingenieur und Architecten-Vereins. 1 Heft. 1869. E. Ganguillet und W. Kutter.

Французскій инженеръ *Гауклеръ* *) даетъ формулу для средней скорости въ трубахъ:

$$\sqrt{U} + 0,5r(U)^{\frac{1}{4}} = A(2r)^{\frac{1}{3}}(i)^{\frac{1}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

изъ которой, для случая движенія въ каналахъ, онъ выводитъ

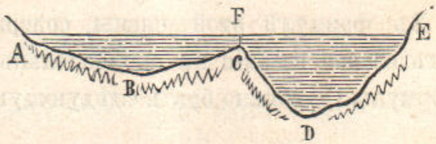
$$\sqrt{U} = \alpha(r)^{\frac{1}{3}}(i)^{\frac{1}{4}} \text{ метр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ α = отъ 5 до 5,7, если паденіе i больше 0,0007. Если же паденіе меньше 0,0007, то должно пользоваться формулою

$$(U)^{\frac{1}{4}} = \beta(r)^{\frac{1}{3}}(i)^{\frac{1}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

въ которой β = отъ 6,4 до 7. Въ формулѣ (10), для трубъ, бывшихъ уже въ употребленіи, $A = 5,5$.

67. Формулы предъидущаго № могутъ служить для рѣшенія различныхъ вопросовъ, касающихся движенія воды въ рѣкахъ и каналахъ, но такъ какъ онѣ предполагаютъ, что сопротивленіе во всѣхъ точкахъ подводнаго периметра одинаково и такъ какъ численныя значенія коэффиціентовъ, входящихъ въ эти формулы, опредѣлены изъ наблюденій надъ движеніемъ въ руслахъ болѣе или менѣе правильной формулы, то въ практикѣ могутъ встрѣтиться случаи, когда результаты, получаемые изъ этихъ формулъ, будутъ значительно уклоняться отъ истины. Такъ напр. въ случаѣ, на который обратилъ вниманіе *Беланже*, когда, вслѣдствіе особенностей формы поперечнаго сѣченія, сопротивленіе въ точкахъ одной нѣкоторой части периметра будетъ значительно болѣе сопротивленія въ точкахъ периметра остальной части, формулы будутъ давать результаты, значительно уклоняющіеся отъ истины.



Фиг. 36.

Напр. положимъ, что профиль живого сѣченія рѣки, представленный на фиг. 36, имѣетъ слѣдующіе размѣры: периметръ

*) Annales des Ponts et Chaussées. 1868. *M. Gauckler*.

ABC = 30 метровъ, периметръ части CDE равенъ 15 метровъ, площадь части $ABCF$ равна 6 квадр. метровъ, площадь части $FCDE$ равна 20 квадр. метр., глубина $CF = 0{,}1$ метр. и паденіе равно 0,0003. При такихъ размѣрахъ полный периметръ сѣченія будетъ равенъ $30 + 15 = 45$ метровъ, а полная площадь $5 + 20 = 25$ квадр. метр.; слѣдов., средній радіусъ сѣченія будетъ равенъ $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ метр.

Опредѣляя расходъ по формулѣ Шези съ коэффиціентомъ Тадини, получимъ:

$$U = 50\sqrt{0{,}0003 \times \tfrac{5}{9}} = 0{,}6455 \text{ метр.}$$

и

$$Q = 25 \times 0{,}6455 = 16{,}44 \text{ кубич метр.}$$

Но не трудно видѣть, что найденный расходъ будетъ значительно меньше истиннаго. Дѣйствительно, часть $ABCF$ сѣченія, имѣя, сравнительно съ частью $FCDE$, значительный периметръ и малую площадь, будетъ представлять несравненно бóльшее сопротивленіе движенію воды, нежели часть $FCDE$, а потому, разсматривая обѣ эти части какъ одинъ профиль, т.-е. принимая для сопротивленія во всѣхъ точкахъ периметра $ABCDE$ нѣкоторое среднее значеніе, мы тѣмъ самымъ значительно уменьшаемъ количество воды противу дѣйствительнаго, протекающее чрезъ самую производительную часть CDE сѣченія, между тѣмъ какъ увеличиваемъ, сравнительно съ дѣйствительнымъ, расходъ воды чрезъ часть ABC только въ незначительной степени. Поэтому, въ разсматриваемомъ случаѣ результатъ будетъ ближе къ дѣйствительности, если опредѣлимъ расходъ чрезъ каждую изъ частей ABC и CDE отдѣльно и возьмемъ сумму найденныхъ такимъ образомъ расходовъ.

Очевидно, что устроивъ перегородку CF, мы этимъ не увеличимъ полнаго расхода, а напротивъ того, нѣсколько уменьшимъ, такъ какъ перегородка эта увеличитъ длину подводнаго периметра. Предполагая же, что подобная перегородка существуетъ и опредѣляя расходъ чрезъ части $ABCF$ и $FCDE$ отдѣльно, найдемъ:

для части $ABCF$:

периметръ = 30,1 метр., площадь 5 кв. метр.

скорость $U_1 = 50 \sqrt{0{,}0003 \frac{5}{30{,}1}} = 0{,}353$ метр.

расходъ $Q_1 = 5 \times 0{,}353 = 1{,}765$ кубич. метровъ;

для части $FCDE$:

перим. $= 15{,}1$ метр., площадь $= 20$ квадр. метр.

скорость $U_2 = 50 \sqrt{0{,}0003 \frac{20}{15{,}1}} = 0{,}997$ метр.

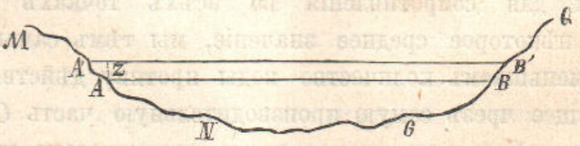
расходъ $Q_2 = 20 \times 0{,}997 = 16{,}94$ куб. метр.

Слѣдов., полный расходъ $Q = Q_1 + Q_2 = 21{,}705$ куб. метр., между тѣмъ какъ прежде для этого расхода имѣли только 16,14 куб. метровъ.

63. *Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ, относящихся къ случаю равномѣрнаго движенія воды въ каналахъ и рѣкахъ.*

1) По данному расходу Q, паденію i и формулѣ контура сѣченія, опредѣлить положеніе уровня воды въ этомъ сѣченіи.

Вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ не иначе, какъ попытками. Имѣя профиль $MNPQ$ поперечнаго сѣченія фиг. 37, вы-



Фиг. 37.

черченнымъ въ извѣстномъ масштабѣ, сначала проводимъ горизонтальную прямую AB на-удачу и опредѣляемъ по чертежу периметръ $ANPB$ и площадь $ANPBA$, разсматривая AB какъ прямую, опредѣляющею положеніе уровня воды въ данномъ сѣченіи. Пусть p и a будутъ периметръ и площадь профиля $ANPB$; тогда формула Шези доставитъ намъ для расхода выраженіе:

$$q = Ma \sqrt{\frac{a}{p}\, i}\,.$$

Если найденный по этой формулѣ расходъ q окажется, положимъ, меньше даннаго расхода Q, то это будетъ значить, что уровень воды въ данномъ сѣченіи лежитъ выше прямой AB. Когда такимъ образомъ, послѣ нѣсколькихъ попытокъ, будетъ найдено такое положеніе для прямой AB, при которомъ расходъ q, опредѣляемый предъидущею формулою, будетъ мало отличаться отъ даннаго расхода Q, тогда надлежащее положеніе уровня воды въ сѣченіи можно найти такъ: предполагая, что истинный уровень $A'B'$ лежитъ на разстояніи z отъ прямой AB, можно принять для площади $A'NPB'$ выраженіе $a+lz$ (гдѣ l есть длина AB), а для периметра — выраженіе $p+2z$, а слѣдов.

$$Q = M(a+lz)\sqrt{\frac{a+lz}{p+2z}\,i} \quad \text{и} \quad \left(\frac{Q}{q}\right)^2 = \frac{\left(1+\frac{lz}{a}\right)^3}{1+\frac{2z}{p}}.$$

Изъ этого послѣдняго уравненія не трудно будетъ опредѣлить z, имѣя въ виду, что $\frac{lz}{a}$ есть небольшая правильная дробь.

2) Данъ расходъ Q и паденіе i; требуется опредѣлить площадь A живого сѣченія.

Понятно, что вопросъ этотъ будетъ неопредѣленнымъ, пока не указана будетъ форма площади сѣченія и не будутъ даны нѣкоторыя изъ размѣровъ этого сѣченія. Такъ какъ сѣченію искусственныхъ каналовъ всего чаще придаютъ форму трапеціи, то мы предположимъ, что сѣченіе канала должно имѣть форму, указанную на фиг. 38, при которой x будетъ ширина дна канала, z глубина и α уголъ наклоненія къ горизонту боковыхъ стѣнокъ канала, зависящій отъ свойствъ грунта, если только стѣнки не имѣютъ искусственной деревянной или каменной одежды. Въ этомъ случаѣ для площади профиля $ACDB$ имѣемъ $zx+z^2\operatorname{cotang}\alpha$, а для подводнаго периметра $x+\frac{2z}{\sin\alpha}$; слѣдов., формула Шези даетъ:

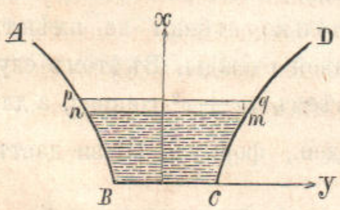
Фиг. 38.

$$\frac{Q^2}{M^2 i} = \frac{z^3(x+z\operatorname{cotang}\alpha)^3}{x\sin\alpha+2z}\cdot\sin\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(a)}$$

откуда, по данному значенію одной изъ неизвѣстныхъ x или z, найдется другая. Опредѣленіе же обѣихъ неизвѣстныхъ x и z будетъ возможнымъ, если задана будетъ еще нѣкоторая зависимость между ними. Такъ, напр., еслибы каналъ долженъ былъ удовлетворять условію наименьшей затраты капитала на его построеніе, то имѣя въ виду, что стоимость построенія канала данной длины пропорціональна объему выемки, т.-е. въ настоящемъ случаѣ площади живого сѣченія, нужно было бы найти такую зависимость между xz, при которой площадь $xz+z^2 \operatorname{cotang}\alpha$ достигаетъ своего наименьшаго значенія. Еслибы требовалось, чтобы каналъ доставлялъ требуемый объемъ воды Q съ наименьшею потерею высоты на треніе, то нужно было бы средній радіусъ сѣченія, равный отношенію $\dfrac{zx+z^2 \operatorname{cotang}\alpha}{x+\dfrac{2z}{\sin\alpha}}$, превратить въ наибольшій. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, пришлось бы для рѣшенія вопроса приравнять нулю производную, взятую по x, того выраженія, которое должно обратить въ наименьшее, разсматривая z, какъ функцію x; а затѣмъ, изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія, исключить производную $\frac{dz}{dx}$, при помощи уравненія, получающагося чрезъ дифференцированіе выраженія (a). Результатъ исключенія производной $\frac{dz}{dx}$ доставилъ бы намъ одно уравненіе между x и z, которое, взятое вмѣстѣ съ уравненіемъ (a), и опредѣлило бы обѣ неизвѣстныя.

3) Найти такую форму профиля сѣченія, которая бы при различныхъ положеніяхъ уровня воды доставляла для средней скорости U одно и то же значеніе.

Пусть $ABCD$ будетъ такой профиль (фиг. 39), симметрическій относительно вертикальной оси x, ширина BC дна котораго равна $2b$. Пусть nm будетъ положеніе уровня воды. Обозначая чрезъ $2y$ длину mn, получимъ для площади $nBCm$ выраженіе



Фиг. 39.

$$2\int_0^x y dx,$$

а для периметра $nB + Bc + Cm$ — выраженіе

$$2b + 2\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \partial x, \text{ гдѣ } \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \partial x = \partial s.$$

Слѣдов., для средняго радіуса сѣченія имѣемъ:

$$r = \frac{\int_0^x y \partial x}{b + \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}};$$

но условіе, чтобы средняя скорость U оставалась постоянною для всѣхъ значеній x, требуетъ, чтобы средній радіусъ r былъ бы также постояненъ; поэтому, приводя послѣднее уравненіе къ одному знаменателю и дифференцируя его по x, получимъ:

$$y = r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

откуда $$\partial x = \frac{r \partial y}{\sqrt{y^2 - r^2}},$$

и, наконецъ,

$$x = r \operatorname{lognat}\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - r^2}}{b + \sqrt{b^2 - r^2}}\right), \quad \text{или} \quad y = \tfrac{1}{2}\left[k e^{\frac{x}{r}} + \frac{r^2}{k} e^{-\frac{x}{r}}\right],$$

гдѣ $$k = b + \sqrt{b^2 - r^2}.$$

Случаи неравномѣрнаго и неустановившагося движенія въ каналахъ, рѣкахъ и трубахъ.

69. Въ № 64 были выведены уравненія движенія воды въ каналахъ и рѣкахъ при помощи уравненій *Навье*, принимающихъ во вниманіе внутреннее, правильно дѣйствущее, треніе; между тѣмъ, намъ извѣстно, что, при конечныхъ размѣрахъ поперечныхъ сѣченій потока, кромѣ правильно дѣйствующаго тренія, проявляется отъ случайныхъ причинъ новое сопротивленіе, значительно бо́льшее этого тренія. Несмотря на то, что это новое сопротивленіе происходитъ отъ неуловимыхъ обстоятельствъ, оно можетъ быть, съ нѣкоторою степенью точности, оцѣнено,

какъ полагаетъ *Буссинекъ*, путемъ анализа. Для этого, слѣдуя Буссинеку *), нужно: во-первыхъ, писать уравненія движенія не для истинныхъ скоростей частицъ жидкости, но для *среднихъ—мѣстныхъ*, и во-вторыхъ, принимать коэффиціентъ B внутренняго тренія (входящій въ уравненія Навье) за функцію координатъ.

Причины, возмущающія правильность движенія, всегда находятся на поверхностяхъ, ограничивающихъ жидкость, т.-е. на периметрахъ сѣченій. Наблюдая внимательно движеніе воды въ рѣкѣ, можно видѣть, какъ отъ береговъ и дна, безпрерывно и въ значительномъ числѣ, отдѣляются бóльшія или меньшія вращающіяся (вихревыя) массы воды и подвигаются къ срединѣ сѣченія. Эти-то массы и нарушаютъ правильность теченія, являясь причиною ударовъ частицъ между собою, слѣдствіемъ чего бываетъ увеличеніе, въ данное мгновеніе, для даннаго мѣста пространства, коэффиціента B. Такъ какъ первоначальный импульсъ каждой такой отдѣляющейся отъ периметра массы зависитъ отъ скорости движенія u_0 на периметрѣ существующей, то коэффиціентъ B слѣдуетъ принимать пропорціональнымъ этой скорости; затѣмъ, такъ какъ такихъ вихревыхъ массъ отдѣляется въ единицу времени тѣмъ больше, чѣмъ менѣе направляющее дѣйствіе поверхностей, ограничивающихъ жидкость, то B слѣдуетъ принимать пропорціональнымъ и среднему радіусу сѣченія (отношенію площади сѣченія къ периметру). Вихревыя массы, отдѣляющіяся на периметрѣ и подвигающіяся къ срединѣ сѣченія, будутъ, смотря по формѣ контура этого сѣченія, или сосредоточиваться на поверхностяхъ все меньшихъ и меньшихъ размѣровъ, или же раздробляться, распространяясь по поверхностямъ все большихъ и большихъ размѣровъ. Напр., въ случаѣ движенія въ цилиндрической трубѣ, вихревыя массы, отдѣлившіяся на стѣнкѣ и подвигающіяся къ оси трубы, будутъ сосредоточиваться на цилиндрическихъ поверхностяхъ все меньшаго и меньшаго радіуса; въ случаѣ канала съ прямоугольнымъ сѣченіемъ и притомъ весьма большой ширины, эти массы почти не будутъ ни сосредоточиваться, ни раздробляться,

*) Essai sur la théorie des eaux courantes, par M. J. Boussinesq.

такъ какъ онѣ будутъ переходить отъ плоскости дна къ другимъ, почти такимъ же по величинѣ, плоскостямъ. Понятно, что въ случаѣ, когда вихревыя массы сосредоточиваются, коэффиціентъ B долженъ возростать по мѣрѣ удаленія отъ периметра и онъ долженъ уменьшаться въ обратномъ случаѣ. Такимъ образомъ на коэффиціентъ B должно смотрѣть, какъ на нѣкоторую функцію координатъ, видъ которой находится въ зависимости отъ формы контура поперечнаго сѣченія.

Если вообще назовемъ чрезъ σ площадь поперечнаго сѣченія потока и чрезъ χ периметръ сѣченія, то, на основаніи выше сказаннаго, можно коэффиціентъ B представить формулою:

$$B = \Delta A u_0 \frac{\sigma}{\chi} \cdot \varphi,$$

въ которой φ есть нѣкоторая функція координатъ. Въ случаѣ канала весьма большой ширины, функцію φ можно принять за 1, такъ какъ въ такомъ каналѣ возмущающія волненія почти остаются постоянными, не сосредоточиваясь и не раздробляясь; въ случаѣ же трубы радіуса R, можно φ принять равнымъ отношенію $\frac{R}{r}$, гдѣ r есть разстояніе отъ оси трубы той частицы жидкости, движеніе которой разсматриваемъ. Такимъ образомъ, слѣдуя Буссинеку, можно принимать: для прямоугольнаго профиля, сильно растянутаго:

$$B = \Delta A u_0 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{a})$$

а для круглаго профиля радіуса R:

$$B = \Delta A u_0 \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{b})$$

Здѣсь A и есть собственно коэффиціентъ внутренняго, правильно дѣйствующаго тренія.

Въ № 31 мы имѣли уравненія (46), (d) и (47), изъ которыхъ и получаются уравненія движенія Навье (см. уравн. 48 № 31), когда коэффиціентъ B разсматривается какъ величина постоянная. Не трудно теперь, при помощи этихъ же уравненій, вывести уравненія движенія болѣе общія, въ предположеніи, что B есть функція координатъ. Такими именно уравненіями, придавая въ нихъ коэффиціенту B вышеуказанныя значенія (a) и (b), и пользуется Буссинекъ въ своемъ мемуарѣ при изслѣдованіи обстоятельствъ движенія воды въ каналахъ, рѣкахъ и трубахъ.

Мы однако не будемъ здѣсь выводить всѣхъ уравненій Буссинека, но воспользуемся его мемуаромъ для вывода только тѣхъ уравненій движенія воды въ каналахъ, рѣкахъ и трубахъ, которыя содержатъ среднюю скорость всего потока, такъ какъ при рѣшеніи вопросовъ, имѣющихъ практическую важность, только такія уравненія и необходимы.

70. Будемъ предполагать форму канала, рѣки или трубы такою, чтобы направленія средняго движенія можно было повсюду считать почти параллельными между собою. Въ одномъ изъ поперечныхъ сѣченій, принимаемомъ за начальное, расположимъ ось y горизонтально, ось z въ вертикальной плоскости внизъ, а слѣдов. ось x по направленію средняго движенія; причемъ въ случаѣ канала, или рѣки, ось эту направимъ по свободной поверхности, въ равномъ разстояніи отъ береговъ, а въ случаѣ трубы, по оси сей послѣдней. Пусть p_0 будетъ давленіе въ точкѣ, лежащей на оси x. Въ случаѣ канала, или рѣки, будемъ предполагать, что ширина его l весьма велика въ сравненіи съ глубиною h, т.-е. что сопротивленіе движенію отъ береговъ ничтожно въ сравненіи съ сопротивленіемъ отъ дна. Сопротивленіе же на свободной поверхности будемъ принимать равнымъ нулю. При такихъ предположеніяхъ, изъ трехъ скоростей u, v и w, послѣднія двѣ будутъ, во всѣхъ мѣстахъ, незначительны въ сравненіи съ u; поэтому, обозначая еще буквою i уголъ, составляемый направленіемъ движенія съ горизонтомъ, получимъ, для первой степени приближенія, слѣдующія уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} g\sin i - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{F}{\mu} = \left(\frac{du}{dt}\right) \\ -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad g\cos i - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

гдѣ $\frac{F}{\mu}$ обозначаетъ проекцію на ось x *ускоренія внутренняго тренія*, приложеннаго къ тому элементу жидкости, движеніе котораго разсматриваемъ.

Послѣднее изъ этихъ уравненій даетъ

$$p = p_0 + \Delta z \,.\, \cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{b})$$

откуда слѣдуетъ, что $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$, или, съ небольшею погрѣшностью, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial s}$, такъ какъ элементъ ∂s дуги траэкторіи чувствительно параллеленъ оси x. Слѣдов., первое изъ уравненій (a) можно написать въ видѣ:

$$\sin i - \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial s} + \frac{F}{\Delta} = \frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{c})$$

Къ уравненію этому нужно присоединить уравненіе $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, выражающее условіе неразрывности массы жидкости. Но это послѣднее уравненіе, въ настоящемъ случаѣ, не приноситъ намъ никакой пользы, такъ какъ въ немъ мы не имѣемъ права разсматривать производныя $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$, какъ весьма малыя въ сравненіи съ производною $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Условіе неразрывности можетъ быть получено слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ два безконечно близкихъ поперечныхъ сѣченій, отстоящихъ на разстояніи ∂s одно отъ другого. Пусть σ будетъ площадь перваго изъ нихъ, а U средняя скорость въ немъ; тогда $\sigma U \partial t$ представитъ намъ объемъ, протекающій въ элементъ времени ∂t чрезъ это сѣченіе. Для объема же, протекающаго въ то же время чрезъ второе сѣченіе, имѣемъ выраженіе $\left(\sigma U + \frac{\partial(\sigma U)}{\partial s}\partial s\right)\partial t$, такъ что, въ теченіи промежутка времени ∂t, объемъ воды между взятыми сѣченіями увеличивается на количество $-\frac{\partial(\sigma U)}{\partial s}\partial s \,.\, \partial t$. Но если объемъ увеличивается, то происходитъ увеличеніе и самаго поперечнаго сѣченія. Увеличеніе же этого сѣченія, въ элементъ времени ∂t, изображается чрезъ $\frac{\partial \sigma}{\partial t} \,.\, \partial t$, а потому имѣетъ уравненіе:

$$\partial s \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t}\partial t = -\frac{\partial(\sigma U)}{\partial s}\partial s \cdot \partial t, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U)}{\partial s} = 0 \,.\, . \quad (13)$$

или, наконецъ, обозначая чрезъ Q *расходъ* въ сѣченіи σ, т.-е. принимая

$$\sigma U = Q\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что Q и $-\sigma$ суть частныя производныя, первое по t, а второе по s, нѣкоторой функціи отъ t и s, полный дифференціалъ которой равенъ $Q\partial t - \sigma\,.\,\partial s$.

Уравненіе (c) получитъ весьма важное значеніе въ приложеніяхъ, если его представимъ въ зависимости отъ средней скорости U сѣченія. Чтобы этого достигнуть, умножимъ его на элементъ площади сѣченія и возьмемъ интегралъ, распространенный на всю площадь σ. Очевидно, получимъ

$$\left(\sin i - \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p_0}{\partial s}\right)\sigma + \frac{1}{\Delta}\int_\sigma F\,.\,\partial\sigma = \frac{1}{g}\int_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right)\partial\sigma \quad . \quad . \qquad (d)$$

Такъ какъ внутреннее треніе, во всякомъ случаѣ, есть сила, проявляющаяся отъ взаимодѣйствія смежныхъ частицъ жидкости другъ на друга, то для каждой пары такихъ частицъ, взаимодѣйствія эти должны приводиться къ двумъ равнымъ по величинѣ, но противоположнымъ по направленію, силамъ, а потому интегралъ $\int_\sigma F\,.\,\partial\sigma$ долженъ приводиться къ суммѣ только тѣхъ его элементовъ, которые относятся къ частицамъ, подверженнымъ внѣшнему тренію, т.-е. лежащимъ на мокромъ периметрѣ сѣченія. Пусть χ будетъ мокрый периметръ и u_0 скорость на его элементѣ $\partial\chi$; тогда, согласно указаніямъ опыта, какъ это намъ уже извѣстно, можно принять:

$$\frac{1}{\Delta}\int_\sigma F\,.\,\partial\sigma = -\int_\chi b_0 u_0^2\,.\,\partial\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

Въ случаѣ же, когда скорость u_0 и коэффиціентъ b_0, на всемъ протяженіи периметра, можно будетъ принимать за постоянныя количества, выраженіе (16) можно будетъ представить въ видѣ

$$\frac{1}{\Delta}\int_\sigma F\,.\,\partial\sigma = -\,b_0 u_0^2\,.\,\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16\text{ bis})$$

Коэффиціентъ b_0, зависящій отъ физическихъ свойствъ твердыхъ поверхностей, направляющихъ движеніе воды, опредѣляется опытомъ.

Обратимся теперь къ опредѣленію интеграла, входящаго во вторую часть уравненія (d).

Вообразимъ два поперечныхъ сѣченія потока AB и CD, площади которыхъ суть σ_0 и σ_1, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ абциссы x, равнымъ s_0 и s_1, и опредѣлимъ приращеніе количества движенія, въ элементъ времени ∂t, массы воды, заключенной между этими двумя сѣченіями.

Одинъ изъ безконечно малыхъ элементовъ объема $ABCD$ имѣетъ массу $\mu\partial\sigma\partial s$, количество движенія которой есть $\mu\partial\sigma\partial s \,.\, u = \mu u\partial\sigma\partial s$; слѣдоват., количество движенія безконечно тонкаго слоя, заключеннаго между сѣченіями, соотвѣтствующими абсциссамъ s и $s + \partial s$, есть $\mu\partial s\int\limits_\sigma u\partial\sigma$, а потому количество движенія всей массы $ABCD$ есть

$$\mu\int\limits_{s_0}^{s_1}\partial s\int\limits_\sigma u\partial\sigma.$$

По прошествіи ∂t единицъ времени, скорость u какой-либо частицы, принадлежащей этой массѣ, превращается въ $u + \left(\frac{du}{dt}\right)\partial t$; поэтому, искомое приращеніе количества движенія всей массы $ABCD$ изображается такъ:

$$\mu\partial t\int\limits_{s_0}^{s_1}\partial s\int\limits_\sigma\left(\frac{du}{dt}\right)\partial\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

гдѣ $\left(\frac{du}{dt}\right)$ есть полная производная по времени скорости u.

Но, въ теченіи ∂t единицъ времени, сѣченія AB и CD перемѣщаются въ новыя положенія $A'B'$ и $C'D'$; поэтому, найденное выраженіе (e) должно равняться разности количествъ движенія массъ $A'B'C'D'$ и $ABCD$. Для опредѣленія этой разности замѣтимъ, что еслибы движеніе было установившимся, то количество движенія массы, заключенной между сѣченіями, коихъ абсциссы суть s_0 и s_1, было бы въ моментъ времени $t+dt$ то же самое, что и въ моментъ времени t, но въ случаѣ движенія болѣе общаго, масса воды, заключенная между этими сѣченіями, получитъ въ элементъ времени ∂t приращеніе количества движенія, равное $\mu dt \int_{s_0}^{s_1} \partial s \ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} u d\sigma$, гдѣ $\frac{\partial}{\partial t}$ обозначаетъ частную производную по времени. Если къ этому послѣднему выраженію прибавимъ количество движенія массы $CDC'D'$ и отнимемъ количество движенія массы $ABA'B'$, то опять получимъ приращеніе количества движенія, равное выраженію (e).

Но масса $CDC'D' = \mu \int_{\sigma_1} u_1 dt \, . \, d\sigma_1$; слѣдов., ея количество движенія равно

$$\mu \int_{\sigma_1} u_1{}^2 dt \, \partial\sigma_1 = \mu dt \int_{\sigma_1} u_1{}^2 \, \partial\sigma_1.$$

Подобнымъ образомъ, количество движенія массы $ABA'B'$ равно

$$\mu dt \int_{\sigma_0} u_0{}^2 \, \partial\sigma_0.$$

Слѣдов., имѣемъ уравненіе:

$$\mu dt \int_{s_0}^{s_1} \partial s \int_{\sigma} \left(\frac{du}{dt}\right) \partial\sigma = \mu dt \int_{s_0}^{s_1} \partial s \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} u d\sigma + \mu dt \int_{\sigma_1} u_1{}^2 \, \partial\sigma_1 - \mu dt \int_{\sigma_0} u_0{}^2 \, \partial\sigma_0,$$

или, послѣ сокращенія на μdt,

$$\int_{0}^{s_1} \partial s \int_{\sigma} \left(\frac{du}{dt}\right) \partial\sigma = \int_{s_0}^{s_1} \partial s \, . \, \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} u d\sigma + \int_{\sigma_1} u_1{}^2 \, \partial\sigma_1 - \int_{\sigma_0} u_0{}^2 \, \partial\sigma_0;$$

а такъ какъ

$$\int_{\sigma_1} u_1{}^2 \partial\sigma_1 - \int_{\sigma_0} u_0{}^2 \partial\sigma_0 = \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial s} \int_{\sigma} u^2 \partial\sigma\right) \partial s,$$

то послѣднее уравненіе принимаетъ видъ:

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right) \partial\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma u\partial\sigma + \frac{\partial}{\partial s}\int_\sigma u^2 \partial\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

Принимая въ этомъ уравненіи

$$\int_\sigma u\partial\sigma = U\sigma \quad \text{и} \quad \int_\sigma u^2\partial\sigma = \alpha U^2 \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

окончательно получаемъ

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right)\partial\sigma = \frac{\partial(\sigma U)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\sigma U^2)}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Понятно, что здѣсь U есть средняя скорость сѣченія, а αU^2 есть средняя величина изъ квадратовъ скоростей этого же сѣченія.

Относительно коэффиціэнта α должно замѣтить, что онъ зависитъ отъ формы контура сѣченія и отъ закона распредѣленія скоростей въ точкахъ сѣченія и притомъ численная его величина всегда нѣсколько больше единицы. Дѣйствительно, скорость u какой-либо точки сѣченія можно принять равною $U+\lambda$, гдѣ λ будетъ >0 для однѣхъ точекъ и <0 для другихъ. Внесемъ въ каждое изъ уравненій (17) вмѣсто u его значеніе $U+\lambda$, тогда получимъ:

$$\int_\sigma u\partial\sigma = \sigma U = \int_\sigma (U+\lambda)\,\partial\sigma = \sigma U + \int_\sigma \lambda\partial\sigma, \quad \text{т.-е.} \quad \int_\sigma \lambda\partial\sigma = 0;$$

$$\int_\sigma u^2\partial\sigma = \alpha\sigma U^2 = \int_\sigma (U+\lambda)^2\partial\sigma = \int_\sigma (U^2 + 2U\lambda + \lambda^2)\partial\sigma,$$

или $$\alpha\sigma U^2 = \sigma U^2 + 2U\int_\sigma \lambda\partial\sigma + \int_\sigma \lambda^2\partial\sigma = \sigma U^2 + \int_\sigma \lambda^2\partial\sigma.$$

Но $\int_\sigma \lambda^2\partial\sigma > 0$, такъ какъ сумма положительныхъ членовъ не можетъ быть отрицательною; поэтому, имѣемъ $\alpha\sigma U^2 > \sigma U^2$, т.-е $\alpha > 1$.

Для всѣхъ сѣченій, встрѣчающихся въ практикѣ, какъ оказывается, численное значеніе коэффиціента α всегда близко къ

1,11, или 1,10; поэтому, мы будемъ разсматривать коэффиціентъ α какъ количество, постоянное для всѣхъ сѣченій потока и уравненіе (18) будемъ писать въ видѣ:

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right) \partial\sigma = \frac{\partial(\sigma U)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(\sigma U^2)}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18 \text{ bis})$$

Но $\frac{\partial(\sigma U^2)}{\partial s} = \frac{\partial(\sigma U . U)}{\partial s} = \sigma U \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial(\sigma U)}{\partial s} = \sigma U \frac{\partial U}{\partial s} - U \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ (см. ур. 13),

слѣдоват., имѣемъ также:

$$\int_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right) \partial\sigma = \sigma \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial s}\right) - (\alpha - 1) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Итакъ, вмѣсто уравненія (d) можемъ теперь написать слѣдующее:

$$\sin i - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial p_0}{\partial s} = b_0 u_0^2 \frac{\chi}{\sigma} + \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha - 1}{g} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad . \quad (20)$$

Намъ остается только въ этомъ послѣднемъ уравненіи выразить скорость u_0 на периметрѣ сѣченія чрезъ среднюю скорость U всего сѣченія. Но опредѣленіе, съ надлежащею строгостью, зависимости u_0 отъ U представляетъ значительныя затрудненія, такъ какъ для этого необходимо знать законъ распредѣленія скорости u въ точкахъ сѣченія, т.-е. необходимо интегрировать общія уравненія, относящіяся къ разсматриваемому движенію, чего именно мы избѣжать желали.

Понятно, что средняя скорость U находится въ нѣкоторой *прямой* зависимости отъ скорости u_0 на периметрѣ, такъ что въ простѣйшемъ случаѣ равномѣрнаго и установившагося движенія можно принять $b_0 u_0^2 = b U^2$, причемъ однако на коэффиціентъ b нужно смотрѣть какъ на количество, зависящее не только отъ физическихъ свойствъ ограничивающихъ поверхностей, но и отъ формы контура сѣченія. Въ случаѣ движенія болѣе общаго, зависимость u_0 отъ U будетъ болѣе сложною, такъ какъ въ ней должна отразиться не только форма контура сѣченія, но и измѣняемость этого контура при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому, а также и могущая происходить измѣняемость площади сѣченія съ теченіемъ времени. Если ограничимся случаемъ движенія, довольно близко подходящимъ и къ установившемуся и къ равномѣрному, то можемъ остановиться на зависимости

$$b_0 u_0{}^2 = b U^2$$

и пользоваться, вмѣсто уравненія (20), слѣдующимъ:

$$\sin i - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial p_0}{\partial s} = b\frac{U^2\chi}{\sigma} + \alpha\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{(\alpha-1)U}{g\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad . \; . \quad (21)$$

Погрѣшность, которую мы такимъ образомъ сдѣлаемъ, какъ оказывается, будетъ весьма небольшая и можетъ быть исправлена незначительнымъ измѣненіемъ численныхъ значеній коэффиціентовъ, входящихъ въ три послѣдніе члена уравненія (21).

Уравненія (13) и (21) и суть тѣ, которыми можно пользоваться при рѣшеніи многихъ вопросовъ, касающихся движенія воды въ рѣкахъ, каналахъ и трубахъ.

Для случая установившагося движенія уравненія эти принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sin i - \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p_0}{\partial s} = b U^2\frac{\chi}{\sigma} + \alpha\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) \\ \text{и}\qquad &\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial(\sigma U)}{\partial s} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Въ случаѣ движенія воды въ открытомъ каналѣ, или рѣкѣ, нужно принять $\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$, такъ какъ давленіе на всемъ протяженіи свободной поверхности будетъ, въ этомъ случаѣ, равно атмосферному давленію.

Въ случаѣ же движенія въ трубѣ, произвольную $\frac{\partial p_0}{\partial s}$ можно замѣнить отношеніемъ $-\frac{P_0 - P}{L}$, въ которомъ P_0 и P суть давленія въ начальномъ и конечномъ сѣченіяхъ трубы, а L есть длина трубы.

Наконецъ, въ случаѣ движенія не только установившагося, но и равномѣрнаго, уравненія (22) замѣняются слѣдующими:

$$\sin i - \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p_0}{\partial s} = b U^2\frac{\chi}{\sigma}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad . \; . \; . \quad (23)$$

а первое изъ этихъ уравненій, для каналовъ и рѣкъ, принимаетъ видъ:

$$\sin i = i = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Относительно численной величины коэффиціента b замѣтимъ, что для рѣкъ и каналовъ можно принимать $b = 0{,}0004$, а для трубъ $b = 0{,}00036$; такъ что, вообще, численное значеніе этого коэффиціента оказывается почти независимымъ отъ формы контура сѣченія.

71. *Случай установившагося, но не равномѣрнаго движенія воды въ каналѣ или рѣкѣ.*

Для этого случая имѣемъ уравненія:

$$\sin i = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \alpha \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial(\sigma U)}{\partial s} = 0 \quad . \quad . \quad (25)$$

Пусть $\partial\varsigma$ представляетъ уклонъ или паденіе свободной поверхности воды на длинѣ ∂s, тогда будемъ имѣть

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial s} = \sin i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Внося это послѣднее значеніе въ уравненіе (25), умножая его затѣмъ на ∂s и интегрируя въ предѣлахъ отъ $s = 0$ до s, получимъ:

$$\varsigma = b\int_0^s U^2 \frac{\chi}{\sigma}\,\partial s + \alpha\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{U_0^{\,2}}{2g}\right).$$

Понятно, что здѣсь ς представляетъ собою разность уровней воды въ сѣченіяхъ, находящихся въ началѣ длины s и на ея оконечности.

Такъ какъ $U = \frac{Q}{\sigma}$ и Q для всѣхъ сѣченій одинаково, то послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ:

$$\varsigma = \frac{\alpha Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^{\,2}}\right) + bQ^2\int_0^s \frac{\chi}{\sigma^3}\,\partial s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Слѣдоват., для расхода Q получается формула:

$$Q^2 = \frac{\varsigma}{\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) + b\int_0^s \frac{\chi}{\sigma^3} ds} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Примѣняя эту формулу къ опредѣленію расхода Q, нужно избрать участокъ рѣки съ движеніемъ, по возможности болѣе правильнымъ, опредѣлить его длину s, найти нивиллировкою разность уровней ς въ начальномъ и конечномъ сѣченіяхъ и, наконецъ, непосредственными промѣрами глубины найти площади σ_0 и σ и подводные периметры χ_0 и χ крайнихъ сѣченій. Что же касается интеграла, входящаго въ знаменателѣ послѣдней формулы, то въ случаѣ, не требующемъ большой точности, принимаютъ

$$\int_0^s \frac{\chi}{\sigma^3} ds = \frac{s}{2}\left(\frac{\chi_0}{\sigma_0^3} + \frac{\chi}{\sigma^3}\right);$$

если же желаютъ найти Q съ большею точностью, то интегралъ этотъ находятъ по одной изъ формулъ для приближеннаго интегрированія, напр. по формулѣ *Симпсона*, но тогда нужно непосредственными промѣрами опредѣлить площадь и подводные периметры не только крайнихъ сѣченій участка s, но и нѣскольких промежуточныхъ.

Второй вопросъ, рѣшающійся при помощи формулы (27), есть слѣдующій: данъ продольный профиль русла и размѣры многихъ его поперечныхъ сѣченій (безъ обозначенія въ нихъ положенія уровня воды) на участкѣ s; требуется, зная расходъ Q и положеніе уровня воды въ начальномъ сѣченіи участка, найти положеніе уровня въ послѣднемъ сѣченіи.

Вопросъ этотъ, очевидно, состоитъ въ опредѣленіи разности уровней ς для крайнихъ сѣченій участка s. Обозначимъ чрезъ χ_1 и σ_1 неизвѣстные намъ периметръ (подводный) и площадь сѣченія, взятаго на незначительномъ разстояніи s отъ начальнаго сѣченія, для котораго χ_0 и σ_0 извѣстны. Тогда уравненіе (27) намъ доставитъ:

$$\varsigma_1 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) + bQ^2\left(\frac{\chi_0}{\sigma_0^3} + \frac{\chi_1}{\sigma_1^3}\right)\frac{s_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Такъ какъ для первой степени приближенія можно сдѣлать предположеніе, что $\varsigma_1 = 0$ (по причинѣ, что s_1 невелико), то такое предположеніе позволитъ намъ на профилѣ сѣченія, соотвѣтствующаго разстоянію s_1, вычертить положеніе уровня воды, а слѣдов., найти приближенныя значенія периметра χ_1 и площади σ_1. Внеся въ формулу (a) эти приближенныя значенія, найдемъ изъ нея ς_1, зная которое можно будетъ снова вычертить положеніе уровня въ рэсматриваемомъ сѣченіи и еще разъ найти χ_1 и σ_1, съ большею степенью точности. Затѣмъ, принимая сѣченіе σ_1 за начальное, совершенно такъ же поступая, опредѣлимъ положеніе уровня воды въ слѣдующемъ сѣченіи σ_2, находящемся отъ сѣченія σ_1 на небольшомъ разстояніи s_2, и т. д., пока послѣдовательно переходя отъ сѣченія къ сѣченію не придемъ къ послѣднему. Понятно, что такой методъ рѣшенія предложенной задачи не только доставитъ намъ положеніе уровня воды въ послѣднемъ сѣченіи участка s, но дастъ возможность вычертить профиль продольнаго сѣченія свободной поверхности воды потока.

72. *Опредѣленіе кривой продольнаго профиля свободной поверхности потока.*

Задача эта въ слѣдующемъ простѣйшемъ случаѣ можетъ быть рѣшена вычисленіемъ.

Предположимъ, что каналъ имѣетъ постоянный уклонъ i_0 дна и постоянную ширину l, весьма значительную въ сравненіи съ глубиною h, такъ что можно принять $\sigma = lh$ и $\chi = l$; а слѣдовательно:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s} = l\frac{\partial h}{\partial s}, \text{ или } \frac{1}{l}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Но въ данномъ сѣченіи σ плоскость дна канала составляетъ съ касательною плоскостью къ свободной поверхности уголъ, равный разности $i_0 - i$, поэтому $\partial h = \partial s \sin(i_0 - i) = \partial s(\cos i \sin i_0 - - \cos i_0 \sin i)$; гдѣ, по причинѣ малости угловъ i_0 и i можно ихъ косинусы принять за единицу, слѣдов.

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{l}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial s} = \sin i_0 - \sin i, \text{ или } \sin i = \sin i_0 - \frac{\partial h}{\partial s} \quad . \quad . \quad (b)$$

При этомъ уравненіе (25), когда замѣнимъ въ немъ U на $\frac{Q}{\sigma}$, доставитъ:

$$\sin i_0 - \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} = bQ^2 \frac{l}{\sigma^3} + \frac{\alpha Q^2}{2g} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = bQ^2 \frac{l}{\sigma^3} - \frac{\alpha Q^2}{g\sigma^3} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s}.$$

Откуда имѣемъ:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\sin i_0 - b\frac{Q^2 l}{\sigma^3}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q^2 l}{\sigma^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

или, замѣняя σ на lh,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{h^3 \sin i_0 - b\left(\frac{Q}{l}\right)^2}{h^3 - \frac{\alpha}{g} \cdot \left(\frac{Q}{l}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29 \text{ bis})$$

Положимъ теперь, что при томъ же уклонѣ i_0 дна, той же ширинѣ l канала и томъ же расходѣ Q, движеніе воды было бы *равномѣрнымъ*, еслибы глубина канала повсюду равнялась H; тогда уравненіе (24) доставитъ:

$$\sin i_0 = b\left(\frac{Q}{l}\right)^2 \frac{1}{H^3}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{Q}{l}\right)^2 = \frac{\sin i_0}{b} \cdot H^3.$$

Исключая изъ этого послѣдняго уравненія и изъ уравненія (29 bis) расходъ Q и принимая, для краткости письма, $h = Hx$, а слѣдов. $\partial h = H \cdot \partial x$, получимъ:

$$\sin i_0 \,.\, \partial s = H\frac{x^3 - a^3}{x^3 - 1}\,\partial x = H\partial x + (1 - a^3)H\,\frac{\partial x}{x^3 - 1} \quad . \quad (30)$$

гдѣ

$$a^3 = \frac{\alpha \sin i_0}{gb} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Уравненіе (30) и есть, собственно, дифференціальное уравненіе кривой продольнаго профиля свободной поверхности, отнесенной къ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ s и h, изъ коихъ первая совпадаетъ съ дномъ канала, а вторая идетъ перпендикулярно къ нему вверхъ. Для болѣе яснаго представленія себѣ формы этой кривой полезно имѣть еще и выраженіе для паденія ζ.

Выраженіе это получается безъ затрудненій изъ уравненій (*b*) и (30) настоящаго № и изъ уравненія (26) № предъидущаго, а именно:

$$\partial\zeta = \sin i \,.\, ds = \sin i_0 \,.\, ds - dh = \sin i_0 ds - H \,.\, dx; \text{ слѣдов.}$$

$$\partial\zeta = (1 - a^3) H \frac{dx}{x^3 - 1} = \sin i_0 (1 - a^3) \frac{ds}{x^3 - a^3} \quad . \quad . \quad (32)$$

Изъ уравненій (30) и (32) видно, что относительно расположенія свободной поверхности потока могутъ, повидимому, быть *шесть* случаевъ, распредѣляющихся въ двухъ слѣдующихъ группахъ.

Первая группа, существующая при условіи, что $a < 1$, т.-е. $H > aH$.

Случай 1. Когда $h > H > aH$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{ds} = H \frac{dx}{ds} > 0$ и $\frac{\partial\zeta}{ds} = \sin i > 0$.

Слѣдов., въ этомъ случаѣ, подвигаясь вдоль по теченію, *глубина потока возростаетъ, а уровень понижается.*

Случай 2. Когда $H > h > aH$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{ds} < 0$ и $\sin i > 0$, т.-е. *глубина уменьшается и уровень понижается.*

Случай 3. Когда $H > aH > h$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{ds} > 0$ и $\sin i < 0$, т.-е. *глубина возростаетъ и уровень поднимается.*

Вторая группа случаевъ, существующая при условіи, что $a > 1$, т.-е. $aH > H$.

Случай 4. Когда $h > aH > H$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{ds} > 0$ и $\sin i < 0$, т.-е. *глубина возростаетъ и уровень поднимается.*

Случай 5. Когда $aH > h > H$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{ds} < 0$ и $\sin i > 0$, т.-е. *глубина уменьшается и уровень понижается.*

Случай 6. Когда $aH > H > h$.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial h}{\partial s} > 0$ и $\sin i > 0$, т.-е. *глубина возростаетъ и уровень понижается.*

Замѣтимъ, что условія $a < 1$ или же $a > 1$, на основаніи уравненія (31), приводятъ къ условіямъ: $\sin i_0 < \frac{gb}{a}$, или же $\sin i_0 > \frac{gb}{a}$; поэтому, если только, по свойствамъ дна канала, можно принять $b = 0{,}0004$, то тогда $\frac{gb}{a} = \frac{9{,}81 \times 0{,}0004}{1{,}11} = 0{,}00353$, а слѣдов., когда $a < 1$, тогда уголъ $i_0 < 12'10''$, а когда $a > 1$, тогда уголъ $i_0 > 12'10''$.

Такъ какъ изъ разбора уравненій (30) и (32) оказывается, что кривая, даваемая этими уравненіями, имѣетъ двѣ отдѣльныя вѣтви, изъ коихъ одна пересѣкаетъ ось абсциссъ, т.-е. ось s, то принимая эту точку пересѣченія за начало координатныхъ осей, уравненіе кривой должно доставить для h или для x нуль, когда примемъ $s = 0$. Интегрируя при такомъ предположеніи уравненіе (30) въ предѣлахъ отъ $s = 0$ до s, получимъ:

$$\sin i_0 \,.\, s = Hx + (1 - a^3)H \int_0^x \frac{dx}{x^3 - 1} \quad . \; . \; . \quad (33)$$

Затѣмъ оказывается, что разсматриваемая кривая имѣетъ горизонтальную ассимптоту, приближаясь къ которой координата h (или x) неопредѣленно возростаетъ, поэтому если эту ассимптоту примемъ за ту горизонтальную прямую, отъ которой будемъ считать высоты ζ, то при $h = \infty$ (или $x = \infty$), должны получить $\zeta = 0$. Интегрируя при этомъ послѣднемъ предположеніи уравненіе (32), получимъ:

$$\zeta = (1 - a^3)H \int_\infty^x \frac{dx}{x^3 - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Но разлагая подъинтегральную функцію на частныя дроби и совершая на самомъ дѣлѣ интегрированіе, получаемъ:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{b} \text{ lognat } \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ arc. tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

а такъ какъ:

$$\text{arc. tang}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)_\infty = \frac{\pi}{2},\ \text{arc. tang}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)_0 = \text{arc. tang}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

а логариѳмическій членъ, какъ при $x=\infty$, такъ и при $x=0$, обращается въ нуль, то имѣемъ:

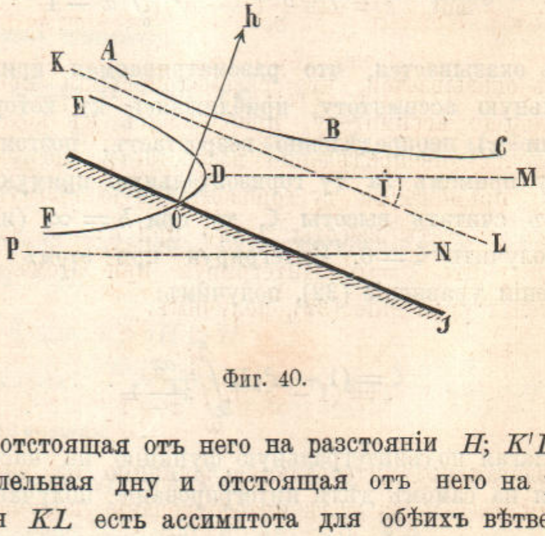
$$\zeta = (1 - a^3 H\left[\frac{1}{6}\ \log.\ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc. tang}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \quad (35)$$

$$\sin i_0\ .\ s = Hx + (1-a^3)H\left[\frac{1}{6}\ \log.\ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6} - \text{arc. tang}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

гдѣ $$x = \frac{h}{H}\ ^{*)}.$$

Въ случаѣ, когда $a<1$, кривая имѣетъ форму, указанную на фигурѣ 40, ABC и EDF—суть двѣ вѣтви этой кривой. OS есть прямая совпадающая съ дномъ канала, KL прямая, параллель-

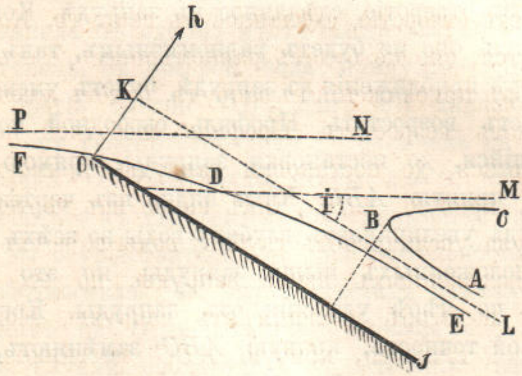


Фиг. 40.

ная дну и отстоящая отъ него на разстояніи H; $K'L'$ прямая, тоже параллельная дну и отстоящая отъ него на разстояніи aH. Прямая KL есть ассимптота для обѣихъ вѣтвей, сверхъ

*) Въ Гидравликѣ Бресса существуютъ таблицы, облегчающія вычисленія по формуламъ 35 и 36.

которой вѣтвь ABC имѣетъ другую ассимптоту—горизонтальную прямую DM, а вѣтвь EDF имѣетъ другою ассимптотою горизонтальную же прямую NP. Въ случаѣ, когда $a > 1$, вѣтви ABC и EDF располагаются такъ, какъ указано на фигурѣ 41. OS



Фиг. 41.

есть дно канала; прямыя KL и $K'L'$ параллельны дну и отстоятъ отъ него на разстояніяхъ первая равномъ H, а вторая равномъ aH. Прямая KL есть ассимптота обѣихъ вѣтвей. Сверхъ того, имѣются еще двѣ горизонтальныхъ ассимптоты: PN у вѣтви FDE и DM у вѣтви ABC.

Не трудно видѣть, что изъ *шести* выше указанныхъ случаевъ три первыхъ относятся къ фигурѣ 40, а именно:

случаю 1-му соотвѣтствуетъ вѣтвь ABC,

случаю 2-му » часть ED' вѣтви EDF
и случаю 3-му » » OD' » EDF.

Остальные же три случая относятся къ фигурѣ 41, а именно:

случаю 4-му соотвѣтствуетъ часть BC вѣтви ABC,
случаю 5-му » » BA » ABC
и случаю 6-му » вѣтвь ODF.

Случай первый (вѣтвь ABC, фиг. 40) характеренъ тѣмъ, что кривая продольнаго сѣченія поверхности воды идетъ въ обѣ стороны до безконечности. Случай этотъ имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности, когда въ каналѣ съ уклономъ дна, меньшимъ $\frac{gb}{\alpha}$ и имѣющимъ равномѣрное движеніе, будетъ въ концѣ его поставлена запруда, такъ что вода, поднявшись со стороны притока, будетъ или переливаться чрезъ порогъ запруды, или вытекать чрезъ отверстіе, сдѣланное въ запрудѣ. Когда движеніе установится, оно не будетъ равномѣрнымъ, такъ какъ скорость, по мѣрѣ приближенія къ запрудѣ, будетъ уменьшаться, а глубина будетъ возростать. Профиль свободной поверхности, представлявшійся, до постановки запруды, прямою KL, превратится въ кривую ABC. Какъ видно изъ чертежа, поставленная запруда увеличиваетъ глубину воды во всѣхъ сѣченіяхъ канала, расположенныхъ выше запруды, но это увеличеніе уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ запруды. Когда не требуется большой точности, кривую ABC замѣняютъ, какъ это впервые было предложено *Пуаре,* параболою, касающеюся своею вершиною уровня воды близъ порога запруды и касающеюся такъ же прямой KL въ той точкѣ, далѣе которой, идя вверхъ противу теченія, положеніе уровня воды въ сѣченіяхъ осталось, какъ предполагается, безъ измѣненія. Уравненіе такой параболы есть слѣдующее:

$$s^2 = 4 \cdot \frac{H_0 - H}{\sin^2 i_0} \cdot (H_0 - h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Въ уравненіи этомъ h представляетъ глубину канала на разстояніи s предъ запрудою, а H_0 есть глубина близъ самаго порога запруды, соотвѣтствующая вершинѣ этой параболы. Уравненіе это получается безъ затрудненія, если имѣть въ виду, что *подъкасательная параболы равна удвоенной абсциссѣ.* Принимая въ немъ $h = H$, найдемъ то разстояніе s, на какое распространяется вверхъ противу теченія вліяніе запруды.

Случай второй (вѣтвь ED', фиг. 40) характеренъ тѣмъ, что кривая идетъ до безконечности только въ одну сторону (вверхъ противу теченія) и что на ней существуетъ точка D', для которой $\frac{\partial h}{\partial s} = \infty$. Такъ какъ въ точкѣ D' кривая идетъ перпендикулярно къ дну, то въ смежности съ этою точкою она не можетъ соотвѣтствовать дѣйствительнымъ явленіямъ движенія, выведеннымъ въ предположеніи, что движеніе совершается повсюду по направленіямъ, чувствительно параллельнымъ дну. Слѣдоват., вѣтвь ED' можетъ въ дѣйствительности имѣть мѣсто только въ такомъ случаѣ, когда въ сѣченіяхъ, смежныхъ съ D', существуютъ нѣкоторыя обстоятельства, несогласныя съ основными предположеніями. Кажется, этотъ случай бываетъ тогда, когда дно канала въ одномъ мѣстѣ быстро понижается, образуя какъ бы ступень, съ которой вода принуждена падать внизъ.

Случай третій (вѣтвь OD', фиг. 40) характеренъ тѣмъ, что кривая, ему соотвѣтствующая, ограничена съ обѣихъ сторонъ. Ни точка O, требующая, чтобы $h=0$, ни точка D' не могутъ относиться къ дѣйствительному движенію. Слѣдов., вѣтвь OD' могла бы осуществиться въ дѣйствительности, при нѣкоторыхъ особенностяхъ, въ двухъ мѣстахъ канала—въ начальномъ смежномъ съ O и конечномъ смежномъ съ D'. Можетъ быть этотъ случай соотвѣтствуетъ истеченію изъ отверстія, снабженнаго русломъ, на оконечности котораго устроена запруда извѣстной высоты.

Случай четвертый (вѣтвь BC, фиг. 41) требуетъ существованія нѣкоторыхъ особенностей въ началѣ канала, т.-е. въ мѣстахъ, смежныхъ съ точкою B, для которой $\frac{\partial h}{\partial s}=\infty$. По недостатку опытовъ, мы не можемъ сказать, при какихъ условіяхъ возможно осуществить этотъ случай.

Случай пятый (вѣтвь BA, фиг. 41) также требуетъ существованія нѣкоторыхъ особенностей въ началѣ канала, несогласныхъ съ основными предположеніями. Очень можетъ быть, что этотъ случай относится къ истеченію изъ отверстія, снабженнаго русломъ, наклоненнымъ къ горизонту подъ угломъ, бо̀льшимъ $\frac{gb}{\alpha}$.

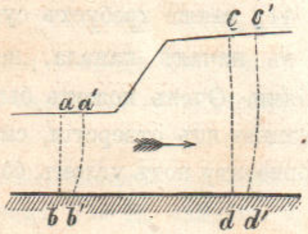
Наконецъ, случай шестой (вѣтвь ODF, фиг. 41) такъ же требуетъ существованія нѣкоторыхъ особенностей въ началѣ канала, т.-е. въ мѣстахъ, смежныхъ съ точкою O, для которой $h=0$.

Изъ всего выше сказаннаго не трудно замѣтить, что въ каналахъ съ уклономъ дна, большимъ $\frac{gb}{\alpha}$, форма свободной поверхности, въ случаѣ установившагося движенія, зависитъ исключительно отъ обстоятельствъ, имѣющихъ мѣсто въ *началѣ канала* и только тогда, когда движеніе притомъ будетъ равномѣрнымъ, свободная поверхность въ продольномъ профилѣ представляетъ линію, идущую въ обѣ стороны до безконечности, именно прямую $h = H$. Въ случаѣ же канала съ уклономъ дна, меньшимъ $\frac{gb}{\alpha}$, такихъ линій, идущихъ въ обѣ стороны до безконечности, можетъ быть двѣ: это прямая KL и кривая ABC (фиг. 40), остальныя же требуютъ существованія нѣкоторыхъ особенностей въ *концѣ канала*, а одна изъ нихъ (вѣтвь OD') и въ концѣ, и въ началѣ.

Понятно, что, при существованіи такихъ особенностей въ нѣкоторомъ мѣстѣ канала, свободная поверхность воды будетъ представлять профиль *составной* изъ двухъ профилей: одинъ будетъ расположенъ выше упомянутаго мѣста, а другой ниже.

Къ числу явленій, сопровождающихъ подобные переходы одного профиля въ другой, явленій еще не достаточно изслѣдованныхъ опытомъ, относится любопытное явленіе, называемое *прыжкомъ воды* (ressaut superficiel, Wasserschwelle), къ разсмотрѣнію котораго мы и переходимъ

73. *Прыжокъ воды*. Явленіе это состоитъ въ томъ, что въ нѣкоторомъ мѣстѣ канала происходитъ быстрое повышеніе уровня воды, какъ это представлено на фиг. 42. Такое повышеніе, образующее какъ бы порогъ на свободной поверхности, можетъ имѣть мѣсто въ случаяхъ, когда скорость движенія принуждена быстро уменьшаться. Для опредѣленія условій, при которыхъ возможно существованіе этого явленія, возьмемъ два поперечныхъ сѣченія потока, σ_0 непосредственно предъ порогомъ и другое σ_1 за порогомъ, но однако въ тѣхъ мѣстахъ канала, въ которыхъ движеніе можно разсматривать какъ совершающееся параллельными струйками. Примѣнимъ къ массѣ воды, заключенной между



Фиг. 42.

взятыми сѣченіями, теорему количества движенія. Приращеніе количества движенія указанной массы, въ элементъ времени ∂t, есть

$$\frac{\Delta}{g}\,\partial t\left(\int\limits_{\sigma_1} u_1^2\,\partial\sigma_1 - \int\limits_{\sigma_0} u_0^2\,\partial\sigma_0\right) = \frac{\Delta\partial t}{g}\,\alpha(\sigma_1\,U_1^2 - \sigma_0 U_0^2) \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ U_0 и U_1 суть среднія скорости въ сѣченія σ_0 и σ_1, удовлетворяющія условію $\sigma_0 U_0 = \sigma_1 U_1 = Q$. Принимая это во вниманіе, выраженію (a) можно будетъ придать еще и слѣдующій видъ:

$$\frac{\Delta\alpha Q^2}{g}\,\partial t\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_0}\right) = -\frac{\Delta\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_0\sigma_1}\,\partial t.$$

Это количество должно приравнять алгебраической суммѣ импульсовъ внѣшнихъ силъ, спроектированныхъ на направленіе движенія. Внѣшнія же силы суть: вѣсъ массы, проекція котораго на направленіе движенія можетъ быть принята за нуль, по причинѣ незначительности уклона дна; давленіе атмосферы, повсюду взаимно уравновѣшивающееся; давленіе отъ дна и стѣнокъ на разсматриваемую массу, дающее въ проекціи нуль; треніе отъ дна и стѣнокъ, которымъ можно пренебречь, по причинѣ незначительности разстоянія между сѣченіями σ_0 и σ_1 и наконецъ давленія на эти послѣднія сѣченія отъ окружающей массы. Импульсы этихъ послѣднихъ давленій суть слѣдующіе: $\Delta\sigma_0\,\frac{h_0}{2}\,\partial t$ и $-\Delta\sigma_1\,\frac{h_1}{2}\,\partial t$; гдѣ h_0 и h_1 суть глубины воды въ сѣченіяхъ σ_0 и σ_1.

Слѣдов., теорема количества движенія даетъ уравненіе:

$$-\frac{\Delta\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_0\sigma_1}\,\partial t = \Delta\sigma_0\,\frac{h_0}{2}\,\partial t - \Delta\sigma_1\,\frac{h_1}{2}\,\partial t,$$

или
$$\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_0\sigma_1} = \tfrac{1}{2}(\sigma_0 h_0 - \sigma_1 h_1) = \frac{1}{2l}\,(\sigma_0^2 - \sigma_1^2);$$

Откуда выводимъ

$$(\sigma_1 - \sigma_0)\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} - \frac{\alpha Q^2}{g\sigma_0\sigma_1}\right) = 0$$

или, такъ какъ разность $\sigma_1 - \sigma_0$ не нуль,

$$(\sigma_1 + \sigma_0)\sigma_0\sigma_1 = \frac{2\alpha}{g} lQ^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Рѣшая это уравненіе относительно σ_1, найдемъ:

$$\sigma_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma_0 + \sqrt{\tfrac{1}{4}\sigma_0{}^2 + \frac{2\alpha lQ^2}{g\sigma_0}} = \frac{\frac{2\alpha lQ^2}{g\sigma_0}}{\tfrac{1}{2}\sigma_0 + \sqrt{\tfrac{1}{4}\sigma_0 + \frac{2\alpha lQ^2}{g\sigma_0}}} \quad . \quad (38)$$

или, имѣя въ виду, что $\sigma_0 = lh_0$ и $\sigma_1 = lh_1$,

$$h_1 = -\tfrac{1}{2}h_0 + \sqrt{\tfrac{1}{4}h_0{}^2 + \frac{2\alpha}{gh_0}\cdot\left(\frac{Q}{l}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что σ_1 (или h_1) выходитъ больше при меньшихъ значеніяхъ для σ_0 (или h_0) и обратно. Поэтому еслибы въ уравненіи (b) мы предположили, что $\sigma_1 = \sigma_0$, то тогда для каждаго изъ этихъ количествъ нашли бы:

$$\sigma_1{}^3 = \sigma_0{}^3 = \frac{\alpha lQ^2}{g}$$

а слѣдов., имѣя въ виду, что $\sigma_1 > \sigma_0$, заключаемъ, что

$$\sigma_1{}^3 - \frac{\alpha lQ^2}{g} > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_0{}^3 - \frac{\alpha lQ^2}{g} < 0$$

или
$$1 - \frac{\alpha lQ^2}{g\sigma_1{}^3} > 0 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{\alpha lQ^2}{g\sigma_0{}^3} < 0;$$

т.-е. заключаемъ, что *слѣдующее количество*,

$$1 - \frac{\alpha lQ^2}{g\sigma^2} = 1 - \frac{\alpha lU^2}{g\sigma} = 1 - \frac{\alpha U^2}{g\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

во время прыжка воды переходитъ изъ отрицательныхъ величинъ въ положительныя.

Если условимся называть движеніе, гдѣ это количество < 0, *быстрымъ*, а движеніе, гдѣ это количество > 0 — *покойнымъ*, то можно сказать, что *при помощи прыжка воды движеніе изъ быстраго переходитъ въ покойное.*

Такъ какъ $\left(\frac{Q}{l}\right)^2 = \frac{\sin i_0}{b} H^3$ (см. выводъ форм. 30), то исключая изъ выраженія (40) расходъ Q, помощью этой послѣдней формулы, представимъ это выраженіе въ видѣ

$$1 - \frac{\alpha \sin i_0}{gb} \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^3 \quad \text{или} \quad 1 - a^3 \left(\frac{H}{h}\right)^3.$$

Слѣдов., можемъ еще сказать, что явленіе прыжка воды можетъ имѣть мѣсто тогда только, когда разность $h^3 - a^3H^3$, или, что одно и то же, когда разность $h - aH$ изъ отрицательныхъ значеній переходитъ къ положительнымъ. Идя по теченію до мѣста, гдѣ существуетъ прыжокъ воды, h должно быть $< aH$, а пройдя это мѣсто, h должно быть $> aH$. Такимъ образомъ на фигурѣ (40), соотвѣтствующей случаю, когда $a < 1$, только одна вѣтвь OD' способна, помощью прыжка воды, перейти въ другую, расположенную выше линіи $K'L'$; на фигурѣ же (41) имѣется такихъ вѣтвей три: ODF, KL и BA. Въ каналѣ съ равномѣрнымъ движеніемъ и уклономъ дна, меньшимъ $\frac{gb}{\alpha}$, нельзя образовать прыжка воды, устраивая на немъ запруду, между тѣмъ какъ въ каналѣ съ уклономъ дна, большимъ $\frac{gb}{\alpha}$, образованіе этого явленія возможно. Впослѣдствіи мы будемъ имѣть случай указать на нѣкоторыя соображенія, объясняющія намъ причину этого обстоятельства.

74. *Случай неустановившагося движенія воды въ рѣкѣ или каналѣ. Распространеніе волнъ.*

Желая изучать какое-либо явленіе, относящееся къ случаю неустановившагося движенія воды въ каналѣ или рѣкѣ, нужно пользоваться слѣдующими уравненіями (см. уравн. 21 и 13 № 70):

$$\left.\begin{array}{c} \sin i = bU^2 \frac{\chi}{\sigma} + \frac{\alpha}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha - 1}{g} \cdot \frac{U}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial \sigma}{\partial s} = 0 \end{array}\right\} . \quad (41)$$

Но принимая $\sigma = lh$, $\sin i = \sin i_0 - \frac{\partial h}{\partial s}$ (форм. b № 72) и разсматривая l какъ постоянное, получимъ, вмѣсто уравненій (41), слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \sin i_0 - \frac{\partial h}{\partial s} - bU^2\frac{1}{h} = \frac{\alpha}{g}\cdot U\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha-1}{g}\cdot\frac{U}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial U}{\partial s} + U\frac{\partial h}{\partial s} = 0. \end{aligned}\right\}. \quad (42)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій производную $\frac{\partial U}{\partial s}$, получимъ

$$g(h\sin i_0 - bU^2) = h\frac{\partial U}{\partial t} + (gh - \alpha U^2)\frac{\partial h}{\partial s} - (2\alpha - 1)U\frac{\partial h}{\partial t}. \quad (43)$$

Положимъ теперь, что уклонъ i_0 дна весьма малъ и что движеніе воды въ каналѣ весьма мало отличается отъ равномѣрнаго и установившагося. Пусть H и V будутъ глубина и скорость (средняя) въ этомъ каналѣ; тогда для такого канала:

$$\left.\begin{aligned} g(H\sin i_0 - bV^2) = H\frac{\partial V}{\partial t} + (gH - \alpha V^2)\frac{\partial H}{\partial s} - (2\alpha - 1)V\frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + H\frac{\partial V}{\partial s} + V\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (44)$$

Въ силу сдѣланнаго предположенія, что движеніе въ каналѣ весьма мало отличается отъ равномѣрнаго и отъ установившагося, нужно въ послѣднихъ уравненіяхъ принимать производныя $\frac{\partial V}{\partial s}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial s}$ и $\frac{\partial H}{\partial t}$ за количества весьма малыя, а также считать весьма малыми и количества $\sin i_0$ и b.

Положимъ теперь, что, дѣйствіемъ какой-либо причины, въ каналѣ произведены были волны, впрочемъ незначительной высоты, и пусть, въ данный моментъ времени t, будетъ $h = H + h'$ и $U = V + v$; гдѣ h' и v должно разсматривать какъ количества тоже весьма малыя. Слѣдов., произведенія весьма малыхъ величинъ: $\sin i_0$, b, $\frac{\partial V}{\partial s}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial s}$ и $\frac{\partial H}{\partial t}$ на весьма малыя величины h' и v должно уже принимать за весьма малыя второго порядка, а потому произведенія эти и можно будетъ отбрасывать.

Внесемъ въ уравненіе (43) и во второе изъ уравненій (42) $H+h'$ вмѣсто h и $V+v$ вмѣсто U и изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій вычтемъ имъ соотвѣтствующія уравненія (44), тогда, съ точностью до весьма малыхъ второго порядка, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&(H+h')\frac{\partial v}{\partial t}-(2\alpha-1)(V+v)\frac{\partial h'}{\partial t}+\\&\qquad+[g(H+h')-\alpha(V+v)^2]\frac{\partial h'}{\partial s}=0\\&\frac{\partial h'}{\partial t}+(H+h')\frac{\partial v}{\partial s}+(V+v)\frac{\partial h'}{\partial s}=0\end{aligned}\right\} \; . \quad (45)$$

При первой степени приближенія можно въ уравненіяхъ этихъ пренебречь количествами h' и v предъ H и V и тогда будемъ имѣть уравненія:

$$\left.\begin{aligned}&H\frac{\partial v}{\partial t}+(gH-\alpha V^2)\frac{\partial h'}{\partial s}-(2\alpha-1)\frac{\partial h'}{\partial t}=0\\&\frac{\partial h'}{\partial t}+H\frac{\partial v}{\partial s}+V\frac{\partial h'}{\partial s}=0\end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (46)$$

Эти же послѣднія уравненія можно интегрировать въ предположеніи, что H и V суть количества постоянныя, независящія ни отъ s, ни отъ t. При такомъ предположеніи легко исключить перемѣнную v и получить для перемѣнной h' слѣдующее дифференціальное уравненіе 2-го порядка въ частныхъ производныхъ:

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}+2\alpha V\frac{\partial^2 h'}{\partial s\partial t}-(gH-\alpha V^2)\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}=0 \; . \; . \; . \quad (47)$$

Примемъ $$h'=F_1(s-ct) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

гдѣ c есть нѣкоторая постоянная.

Такъ какъ

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial s^2}=F_1'',\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=c^2F_1'' \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial s\partial t}=-cF_1'',$$

то видимъ, что выраженіе (48) удовлетворитъ уравненію (47), какова бы ни была функція F_1, если только постоянная c удовлетворитъ слѣдующему квадратному уравненію:

$$c^2-2\alpha V\,.\,c-(gH-\alpha V^2)=0 \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

которое даетъ для c два значенія:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \alpha V + \sqrt{gH + \alpha(\alpha-1)V^2} \\ c_2 &= \alpha V - \sqrt{gH + \alpha(\alpha-1)V^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Слѣдов., общій интегралъ уравненія (47), заключающій двѣ произвольныхъ функцій F_1 и F_2, есть слѣдующій:

$$h' = F_1(s - c_1 t) + F_2(s - c_2 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

гдѣ постоянныя c_1 и c_2 опредѣляются выраженіями (50).

При такомъ значеніи для h', второе, изъ уравненій (46), превращается въ слѣдующее:

$$H\frac{dv}{ds} = (c_1 - V)F_1'(s - c_1 t) + (c_2 - V)F_2'(s - c_2 t).$$

Это же послѣднее уравненіе, будучи проинтегрировано, доставитъ:

$$Hv = (c_1 - V)F_1 + (c_2 - V)F_2 + F(t);$$

гдѣ $F(t)$ есть новая произвольная функція, но только отъ одной перемѣнной t.

Провѣряя первое изъ уравненій (46) помощью найденныхъ выраженій для h' и v, увидимъ, что $F'(t) = 0$, т.-е. что функцію F должно принимать за постоянную произвольную, а въ такомъ случаѣ всегда можно представить себѣ эту произвольную заключенною въ произвольныхъ функціяхъ F_1 и F_2 и писать:

$$v = \frac{c_1 - V}{H} F_1(s - c_1 t) + \frac{c_2 - V}{H} F_2(s - c_2 t) \quad . \quad . \quad (52)$$

Изъ самаго вида выраженій (51) и (52) для h' и v вытекаетъ заключеніе, что производимое волнами измѣненіе въ обстоятельствахъ движенія воды, въ каждомъ поперечномъ сѣченіи канала, можно разсматривать какъ результатъ дѣйствія двухъ причинъ: одной, зависящей отъ функціи F_1 и другой, зависящей отъ функціи F_2; поэтому легко будетъ отдать себѣ отчетъ въ совокупномъ дѣйствіи этихъ причинъ, если ознакомимся съ дѣйствіемъ каждой изъ нихъ отдѣльно.

Для этого предварительно разсмотримъ каковы могутъ быть значенія постоянныхъ c_1 и c_2, опредѣляемыхъ уравненіями (50).

Изъ этихъ уравненій видимъ, что каковы бы ни были H и V, *постоянная c_1 всегда есть величина положительная и притомъ всегда $c_1 > c_2$*. Что же касается постоянной c_2, то она можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ количествомъ. Дѣйствительно, изъ уравненія, опредѣляющаго c_2, видно, что

$$\left.\begin{aligned} c_2 > 0 \quad &\text{если} \quad gH - \alpha V^2 < 0, \\ c_2 = 0 \quad &\text{если} \quad gH - \alpha V^2 = 0 \\ \text{и} \quad c_2 < 0 \quad &\text{если} \quad gH - \alpha V^2 > 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (53)$$

Но неравенство $gH - \alpha V^2 < 0$ можетъ быть написано такъ:

$$1 - \frac{\alpha V^2}{gH} = 1 - \frac{\alpha l V^2}{glH} = 1 - \frac{\alpha l V^2}{g\sigma} = 1 - \frac{\alpha l Q^2}{g\sigma^3} < 0,$$

поэтому, на основаніи сказаннаго въ предъидущемъ №, заключаемъ, что *$c_2 > 0$ для каналовъ съ быстрымъ теченіемъ и $c_2 < 0$ для каналовъ съ покойнымъ движеніемъ, между тѣмъ какъ c_1 и для тѣхъ и для другихъ остается количествомъ положительнымъ.*

Примемъ теперь въ уравненіяхъ (51) и (52) функцію F_2 за нуль, т.-е. положимъ, что

$$h' = F_1(s - c_1 t) \quad \text{и} \quad v = \frac{c_1 - V}{H} F_1(s - c_1 t).$$

Такъ какъ волненіе, появившееся въ нѣкоторомъ сѣченіи канала, можетъ распространяться какъ внизъ по теченію, такъ и вверхъ противу теченія, то положимъ сначала, что желаемъ изучать законы распространенія волнъ, *идущихъ внизъ по теченію.* Помѣстимъ начало абсциссъ s въ томъ сѣченіи, до котораго достигла волна въ моментъ времени $t = 0$, направляя положительную ось s въ сторону теченія воды, какъ это до сихъ поръ постоянно и предполагалось при выводѣ всѣхъ формулъ. Тогда, какъ для сѣченія $s = 0$, такъ и для всякаго сѣченія, для котораго $s > 0$, будемъ имѣть, въ моментъ $t = 0$, $h' = 0$ и $v = 0$;

а слѣдов. и $F_1(s)=0$. И такъ *должно принимать* $F_1(s)=0$ *для всѣхъ положительныхъ значеній перемѣнной* s, *включая и значеніе* $s=0$; слѣдов. и $F_1(s-c_1t)=0$, для всѣхъ такихъ положительныхъ значеній перемѣнныхъ s и t, при которыхъ $s-c_1t=0$, или же $s-c_1t>0$. Но уравненіе $s-c_1t=0$, т.-е. $s=c_1t$, опредѣляетъ намъ абсциссу s того сѣченія, до котораго достигаетъ волненіе въ моментъ времени t, т.-е. даетъ пространство, пройденное волною въ теченіи t секундъ времени; поэтому количество c_1 *есть скорость распространенія волнъ, идущихъ внизъ по теченію, когда рѣшеніе задачи дѣлаемъ зависимымъ только отъ одной функціи* F_1.

Теперь удержимъ въ уравненіяхъ (51) и (52) функцію F_2, а функцію F_1 отбросимъ. Въ такомъ случаѣ, подобно какъ и въ предъидущемъ, придемъ къ заключенію, что $F_2(s)=0$ для всѣхъ положительныхъ значеній s, не исключая и значенія $s=0$; а слѣдов., и $F_2(s-c_2t)=0$ для всѣхъ положительныхъ значеній s и t, при которыхъ $s-c_2t=0$, или же $s-c_2t>0$. Поэтому и теперь можемъ сказать, что c_2 *есть скорость распространенія волнъ, идущихъ внизъ по теченію, когда рѣшеніе задачи дѣлаемъ зависимымъ только отъ одной функціи* F_2. Но чтобы это послѣднее заключеніе было справедливымъ, *нужно, чтобы* c_2 *было величиною положительною; а слѣдов., нужно, чтобы вода въ каналѣ имѣла быстрое теченіе.* Въ противномъ случаѣ, c_2 будетъ <0 или же $=0$ и тогда выраженіе $s-c_2t$, при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ для s и t, будетъ положительнымъ, а слѣдов., F_2 будетъ нулемъ.

И такъ приходимъ къ заключенію, что *въ каналѣ, съ покойнымъ движеніемъ, волнъ, распространяющихся внизъ по теченію со скоростью* c_2 *не существуетъ; въ каналѣ же, съ быстрымъ теченіемъ, существуетъ двѣ волны, распространяющихся внизъ по теченію: одна съ большею скоростью* c_1 *и другая съ меньшею* c_2.

Обстоятельства движенія воды въ каждомъ сѣченіи канала, чрезъ которое въ данное мгновеніе проходятъ обѣ волны, есть результатъ ихъ интерференціи.

Для опредѣленія скорости распространенія волнъ, идущихъ вверхъ противу теченія, мы сохранимъ, для начала абсциссъ s и для направленія положительной оси этихъ абсциссъ, прежнее расположеніе. Въ такомъ случаѣ намъ не нужно будетъ дѣлать въ формулахъ никакихъ измѣненій, но *тогда скорость волнъ, идущихъ вверхъ противу теченія, должна быть величиною отрицательною.*

Такъ какъ c_1 есть величина всегда положительная, то *волны съ скоростью c_1 вверхъ противу теченія никогда распространяться не могутъ; со скоростью же c_2 могутъ распространятся тогда только, когда $c_2 < 0$, т.-е. когда каналъ имѣетъ покойное движеніе.* Слѣдов., въ каналѣ съ быстрымъ движеніемъ воды волнъ, идущихъ вверхъ противу теченія, не существуетъ ни тѣхъ, скорость которыхъ равна c_1, ни тѣхъ, коихъ скорость равна c_2.

Соединяя все выше сказанное, можно явленіе распространенія волнъ въ каналѣ выразить еще слѣдующимъ образомъ: если въ каналѣ съ глубиною H и среднею скоростью движенія V, въ какомъ-либо сѣченіи, будетъ произведено незначительное возвышеніе или пониженіе уровня воды, то въ каналѣ этомъ сейчасъ же начнутъ распространяться волны какъ внизъ по теченію, такъ и вверхъ противу теченія со скоростью, равною $\sqrt{gH + \alpha(\alpha - 1)V^2}$; причемъ общее движеніе воды въ каналѣ сейчасъ же увеличитъ эту скорость на количество αV для волнъ, идущихъ внизъ по теченію и уменьшитъ на такое же количество для волнъ, идущихъ вверхъ, такъ что окончательно скорость волнъ, идущихъ внизъ, будетъ равна суммѣ $\sqrt{gH + \alpha(\alpha - 1)V^2} + \alpha V$, а скорость волнъ, идущихъ вверхъ, будетъ равна разности $\sqrt{gH + \alpha(\alpha - 1)V^2} - \alpha V$. Эта послѣдняя скорость, въ случаѣ потока съ быстрымъ движеніемъ, будетъ отрицательною, т.-е. въ такомъ потокѣ вмѣсто волны, идущей вверхъ, получится волна, идущая внизъ со скоростью $\alpha V - \sqrt{gH + \alpha(\alpha - 1)V^2}$. Можемъ, слѣдовательно, сказать, что потокъ съ быстрымъ теченіемъ воды сноситъ внизъ волны, распространяющіяся вверхъ, между тѣмъ какъ потокъ съ покойнымъ движеніемъ только уменьшаетъ скорость ихъ распространенія.

Для случая распространенія волнъ въ водѣ, находившейся въ состояніи покоя, нужно въ нашихъ формулахъ принять $V = 0$ и тогда для скорости распространенія получимъ формулу:

$$c = \sqrt{gH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{2gH} = 0{,}707 \cdot \sqrt{2gH} \quad . \quad . \quad (54)$$

Эта формула даетъ возможность опредѣлить длину канала съ покоющеюся въ немъ водою по времени, которое окажется нужнымъ, чтобы произведенное въ началѣ этого канала возмущеніе распространилось въ видѣ волны до его оконечности. Въ случаѣ же, когда длина пути, пройденнаго волною, и время, затраченное на прохожденіе этого пути, будутъ извѣстны, формула (54) можетъ послужить для опредѣленія средней глубины H. Помощью именно такого метода опредѣлена была средняя глубина нѣкоторыхъ морей, когда волна, произведенная землетрясеніемъ на одномъ берегу моря, распространялась до другого берега.

75. На основаніи всего сказаннаго въ предъидущемъ № не трудно отдать себѣ отчетъ въ причинѣ, почему явленіе *прыжка воды* не можетъ имѣть мѣста въ потокѣ съ покойнымъ движеніемъ. Въ такомъ потокѣ, въ случаѣ существованія въ нѣкоторомъ сѣченіи причинъ, производящихъ возвышеніе свободной поверхности, это возвышеніе не можетъ получить надлежащей устойчивости, такъ какъ оно сейчасъ же разлагается на волны, распространяющіяся противу теченія, а чрезъ это и сейчасъ же уничтожается. *Движеніе воды въ такомъ каналѣ, при постоянномъ существованіи упомянутыхъ причинъ, не можетъ сдѣлаться установившемся.*

Законы распространенія волнъ могутъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, приводить насъ къ соображеніямъ, позволяющимъ опредѣлять неизвѣстныя величины даннаго вопроса. Напр., въ случаѣ истеченія чрезъ водосливъ въ толстой стѣнкѣ, разсмотрѣнномъ въ № 52 (фиг. 20), глубина y воды въ руслѣ, образованномъ стѣнкою, осталась неопредѣленною и глубину эту нужно было искать опытами, которые и показали, что $y = \frac{2}{3}h$. Теперь же мы можемъ опредѣлить эту глубину путемъ слѣдующихъ соображеній: предположимъ, что русло, образованное толстою стѣнкою, на своей оконечности закрыто щитомъ и что вода, какъ въ этомъ руслѣ, такъ и въ резервуарѣ, находится въ покоѣ. Затѣмъ предположимъ, что щитъ былъ мгновенно приподнятъ. Начавшееся истеченіе должно было постепенно уменьшать глубину h воды въ руслѣ, т.-е. должно было производить постепенное пониженіе уровня воды въ этомъ руслѣ. Пониженіе же это должно было передаваться по руслу во внутрь резервуара въ видѣ волны, распространяющейся противу теченія. Слѣдов., пока существовала такая волна, движеніе не могло быть установившемся и могло превратиться въ установившееся только тогда, когда распространеніе волнъ, идущихъ противу теченія, сдѣлалось невозможнымъ, т.-е. когда скорость распространенія c_2 превратилась въ нуль. Это же послѣднее обстоятельство, какъ намъ извѣстно, имѣло мѣсто тогда, какъ скорость v движенія воды въ руслѣ и глубина y въ немъ удовлетворили уравненію $\alpha v^2 = gy$, или уравненію $v^2 = gy$, такъ какъ теперь $\alpha = 1$, по причинѣ равенства скоростей у всѣхъ струекъ воды (тренія о дно и стѣнки русла не принимаемъ во вниманіе). Но съ другой стороны намъ извѣстно, что скорость v, для разсматриваемаго случая истеченія, опредѣляется формулою $v = \sqrt{2g(h-y)}$; поэтому имѣемъ:

$$2g(h-y) = gy, \text{ или } 2h - 2y = y, \text{ откуда } y = \tfrac{2}{3}h.$$

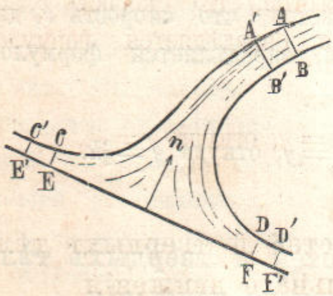
О взаимномъ давленіи жидкостей и твердыхъ тѣлъ во время ихъ относительнаго движенія.

76. Вопросъ, къ разсмотрѣнію котораго мы теперь переходимъ, принадлежитъ къ числу вопросовъ, наименѣе разработанныхъ въ Гидравликѣ. Затрудненія, встрѣчающіяся при рѣшеніи этого вопроса, состоятъ въ невозможности съ достаточною точностью, опредѣлить относительное движеніе частицъ жидкости и твердаго тѣла, въ нее погруженнаго, когда такое относительное движеніе дѣйствительно существуетъ; между тѣмъ какъ, очевидно, давленіе жидкости на тѣло, въ этомъ случаѣ, будетъ зависѣть отъ относительныхъ скоростей соприкасающихся частицъ тѣла и частицъ жидкости. Приходится, при рѣшеніи вопроса, довольствоваться грубымъ приближеніемъ, допуская, что твердое тѣло, движущееся въ жидкости, не измѣняетъ обстоятельствъ движенія частицъ, жидкость составляющихъ, т.-е. что жидкость въ присутствіи этого тѣла движется такъ, какъ она двигалась бы, еслибы тѣла этого совершенно не было. Понятно, что получаемые, при такомъ предположеніи, выводы могутъ весьма чувствительно уклоняться отъ дѣйствительности.

Въ одномъ только случаѣ оказывается возможнымъ получить достаточно точное рѣшеніе вопроса, это когда твердое тѣло подвергается дѣйствію изолированной струи движущейся жидкости.

77. *Ударъ изолированной или отдѣльной струи жидкости о плоскую поверхность.*

Положимъ, что фиг. 43 представляетъ отдѣльную струю воды, вытекающую, напримѣръ, изъ отверстія нѣкотораго сосуда, которая на пути своемъ встрѣчаетъ плоскую поверхность EF какого-либо твердаго неподвижнаго тѣла. Наблюденія показываютъ, что струя, въ этомъ случаѣ, начиная съ извѣстнаго разстоянія, считаемаго отъ плоскости EF, постепенно расширяется по мѣрѣ приближенія къ ней, и затѣмъ поверхность расширенной струи, приближясь къ плоскости EF, принимаетъ направленіе все болѣе и болѣе подходящее къ направленію параллельному плоскости, такъ что начиная съ точекъ нѣкотораго сомкнутаго контура, вычерченнаго на плоскости EF, жидкость покрываетъ плоскость эту въ видѣ слоя постоянной толщины.



Фиг. 43.

Пусть $CEDF$ будетъ пересѣченіе этого слоя постоянной толщины съ поверхностью нѣкотораго цилиндра, ось котораго перпендикулярна къ плоскости EF, а AB — поперечное сѣченіе струи въ одномъ изъ мѣстъ, въ которомъ струя не испытала расширенія.

Въ безконечно малый промежутокъ времени вся масса воды, заключенная между сѣченіями AB и $CEDF$, перемѣщается и занимаетъ новое положеніе $A'B'C'E'D'F'$, въ которомъ она обладаетъ количествомъ движенія, отличномъ отъ того, какимъ обладала въ началѣ разсматриваемаго промежутка времени. Примѣняя, слѣдовательно, къ указанному перемѣщенію теорему количествъ движеній, спроектированныхъ на нормаль къ плоскости EF, можно будетъ опредѣлить давленіе отъ плоскости на жидкость, такъ какъ это давленіе въ отношеніи массы струи есть внѣшняя сила.

Такъ какъ, при разсматриваемомъ перемѣщеніи, можно массу $A'B'CEFD$ считать за неподвижную, а массу $ABB'A'$ разсматривать какъ перемѣстившуюся въ положеніе $CEFDC'E'F'D'$, и такъ какъ скорости частицъ, лежащихъ между цилиндрическими поверхностями $CEFD$ и $C'E'F'D'$, направлены по линіямъ, перпендикулярнымъ къ оси проекцій, то искомое приращеніе количествъ движенія приводится къ выраженію

$$-\frac{\Delta A u dt}{g} u \cos\alpha,$$

гдѣ A и u суть площадь и скорость поперечнаго сѣченія AB, а α есть уголъ нормали къ сѣченію AB съ нормалью n къ плоскости EF. Затѣмъ, переходя къ опредѣленію проекцій импульсовъ внѣшнихъ силъ, имѣемъ, во-первыхъ, для импульса вѣса P массы $ABCEDF$, выраженіе

$$-P\cos\beta \,.\, dt,$$

гдѣ β есть уголъ между нормалью n къ плоскости и вертикальною линіею, или уголъ наклоненія плоскости ED къ горизонту и, во-вторыхъ, Rdt для импульса искомаго нормальнаго давленія R плоскости EF на струю жидкости. Что же касается импульса атмосфернаго давленія, дѣйствующаго на свободную поверхность $ACDB$, то такъ какъ давленіе атмосферы проявляется такъ же и въ сѣченіи AB свободно движущейся струи, давленіе это приведется къ давленію атмосферы, распространенному на часть EF плоскости, а слѣдовательно, и можетъ быть непринимаемо во вниманіе, если ищемъ не полное давленіе струи на плоскость FE, но избытокъ его предъ атмосфернымъ давленіемъ. Понятно также, что давленія, дѣйствующія въ точкахъ цилиндрической поверхности $CEDF$, какъ перпендикулярныя къ оси проекцій n, не войдутъ въ искомое уравненіе. Слѣдовательно, если пренебрежемъ треніемъ частицъ жидкости о неподвижную плоскость EF, искомое уравненіе будетъ

$$\Delta A \cos\alpha \,.\, \frac{u^2}{g} = R - P\cos\beta,$$

откуда для искомаго давленія R имѣемъ

$$R = P\cos\beta + \Delta A\cos\alpha\,\frac{u^2}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Эта формула показываетъ, что давленіе изолированной или отдѣльной струи жидкости, падающей на неподвижную плоскость (точнѣе, избытокъ давленія предъ атмосфернымъ), состоитъ изъ двухъ частей: изъ такъ-называемаго *мертваго давленія*, выражающагося членомъ $P\cos\beta$ и зависящаго отъ вѣса жидкости и *живого давленія*, выражающаго членомъ

$$\Delta A\,.\,\cos\alpha\,\frac{u^2}{g}$$

и зависящаго отъ скорости движенія струи и размѣровъ ея поперечнаго сѣченія.

Такъ какъ положеніе сѣченія AB произвольно и обусловлено только тѣмъ, что оно взято въ тѣхъ мѣстахъ струи, которыя не испытали измѣненія отъ дѣйствія плоскости EF, то можно было бы взять вмѣсто этого сѣченія другое, и тогда количества A', α', P' и u' имѣли бы другія значенія, между тѣмъ какъ величина давленія R, разумѣется, осталась бы та же самая; слѣдовательно,

$$P'\cos\beta + \Delta A'\cos\alpha'\,\frac{u'^2}{g} = P\cos\beta + \Delta A\cos\alpha\,\frac{u^2}{g} \quad . \quad . \quad (2)$$

Въ случаѣ, когда плоскость EF вертикальна, давленіе R приводится только къ живому давленію

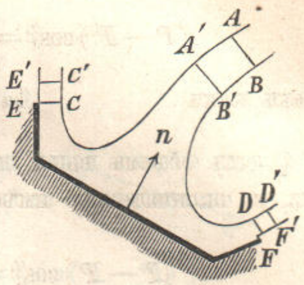
$$\Delta A\cos\alpha\,\frac{u^2}{g},$$

а если при этомъ ударяющая струя будетъ горизонтальна, то это давленіе будетъ равно

$$2\Delta A\,\frac{u^2}{2g},$$

то-есть будетъ вдвое болѣе вѣса цилиндра жидкости, площадь котораго равна площади сѣченія струи, а высота равна высотѣ соотвѣтствующей скорости.

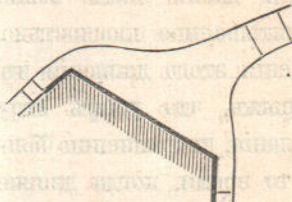
Если плоскость, претерпѣвающая ударъ отдѣльной струи жидкости, будетъ имѣть закраины, повсюду наклоненныя подъ одинаковымъ угломъ α' къ плоскости, какъ напримѣръ, въ случаѣ, показанномъ на фиг. 44, тогда, примѣняя теорему количествъ движенія къ массѣ $ABCDEF$, заключенной между поперечнымъ сѣченіемъ AB и сѣченіемъ коническою поверхностью $CEDF$ и обозначая чрезъ u' скорость частицъ, лежащихъ на этой послѣдней поверхности, очевидно, получимъ для давленія R на плоскость выраженіе



Фиг. 44.

$$R = P\cos\beta + \frac{\Delta A u}{g}(u\cos\alpha + u'\cos\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

изъ котораго прямо видно, что давленіе это будетъ болѣе, нежели на плоскость безъ закраинъ, если только закраины эти такъ направлены, что вмѣстѣ съ плоскостью образуютъ какъ бы сосудъ, обращенный отверстіемъ къ струѣ. Если же закраины эти будутъ обращены въ обратную сторону, а размѣры плоскости будутъ настолько малы, что жидкость не успѣетъ покрыть никакой части плоскости слоемъ съ постоянною толщиною, то для давленія получимъ формулу



Фиг. 45.

$$R = P\cos\beta = \frac{\Delta A u}{g}(u\cos\alpha - u'\cos\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ давленіе будетъ меньше, нежели на плоскость безъ закраинъ, но достаточно большихъ размѣровъ.

Въ уравненіяхъ (3) и (4) выборъ сѣченія AB, подобно тому, какъ и въ уравненіи (1), совершенно произволенъ, поэтому и эти уравненія приводятъ къ уравненіямъ, аналогичнымъ съ уравненіемъ (2), въ справедливости котораго не трудно убѣдиться. Дѣйствительно, уравненіе это можетъ быть представлено въ видѣ

$$(P-P')\cos\beta = \Delta A \cos\alpha \frac{u^2}{g} - \Delta A' \cos\alpha' \frac{u'^2}{g}$$

а такъ какъ $$Au = A'u' = Q.$$

гдѣ Q есть объемъ воды, доставляемой струею въ единицу времени, то окончательно имѣемъ

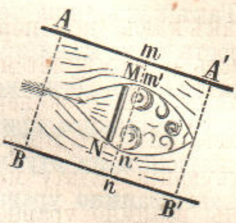
$$(P-P')\cos\beta = \frac{\Delta Q}{g}(u\cos\alpha - u'\cos\alpha').$$

Въ этомъ послѣднемъ видѣ представленное уравненіе (2) есть ничто иное, какъ аналитическое выраженіе теоремы количествъ движеній, примѣненной къ вѣсу $P-P'$ жидкости, заключающейся между сѣченіемъ AB и тѣмъ и другимъ сѣченіемъ струи, которымъ было замѣнено сѣченіе AB.

Замѣтимъ, въ заключеніе объ ударѣ отдѣльной струи о неподвижную плоскость, что, во-первыхъ, теорема количествъ движеній даетъ намъ возможность опредѣлить полное давленіе, испытываемое плоскостью, но не указываетъ на законъ распредѣленія этого давленія въ различныхъ точкахъ плоскости и, во-вторыхъ, что ударъ струи въ первое мгновеніе производитъ давленіе, несравненно бо̀льшее, нежели давленіе R, существующее въ то время, когда движеніе, какъ притекающей струи, такъ и струекъ, отходящихся отъ плоскости, сдѣлалось установившимся. Дѣйствительно, при установившимся движеніи, импульсъ давленія R уравновѣшиваетъ только разность количествъ движеній (спроектированныхъ на направленіе силы R) массъ $ABB'A'$ и $CEDFC'E'D'F'$, между тѣмъ, какъ при самомъ началѣ удара импульсъ давленія долженъ уравновѣшивать и количество промежуточной массы $A'B'CEDF$.

78. Перейдемъ теперь къ опредѣленію давленія на поверхность твердаго тѣла, остающагося неподвижнымъ внутри трубы, въ которой движется жидкость и начнемъ со случая, когда тѣло представляетъ собою весьма тонкую пластинку MN, по-

ставленную перпендикулярно къ оси трубы (фиг. 46) и притомъ такъ, что центръ тяжести пластинки совпадаетъ съ этою осью. Начиная съ нѣкотораго сѣченія AB жидкость раздѣляется на струйки, обхватывающія пластинку со всѣхъ сторонъ, причемъ на нѣкоторомъ разстояніи за пластинкою появляется сѣченіе mn съ наибольшимъ сжатіемъ движущейся струи, пройдя которое струя постепенно расширяется, и начиная съ нѣкотораго сѣченія $A'B'$, продолжаетъ опять совершенно правильное движеніе струйками, параллельными оси трубы. Если обозначимъ послѣдовательно, чрезъ p, p_1 и p' давленія въ сѣченіяхъ AB, mn и $A'B'$, въ которыхъ струйки параллельны оси трубы, чрезъ z, z_1 и z' вертикальныя разстоянія центровъ тяжести этихъ сѣченій отъ нѣкоторой горизонтальной плоскости, чрезъ u, u_1 и u' скорости въ этихъ же сѣченіяхъ и, наконецъ, чрезъ A площадь поперечнаго сѣченія трубы и чрезъ a площадь пластинки, то по теоремѣ Д. Бернулли для сѣченій AB и $A'B'$ получимъ



Фиг. 46.

$$\frac{u^2}{2g}+z+\frac{p}{\Delta}=\frac{u'^2}{2g}+z'+\frac{p'}{\Delta}+y$$

или, такъ какъ $u'=u$,

$$y=z-z'+\frac{p-p'}{\Delta}$$

гдѣ y есть высота или напоръ, потраченный на сопротивленія во время прохожденія жидкости отъ сѣченія AB къ сѣченію $A'B'$. Если, по причинѣ незначительнаго разстоянія этихъ сѣченій, пренебрежемъ треніемъ жидкости, то напоръ y будетъ представлять высоту, потерянную на ударъ, вслѣдствіе быстраго измѣненія скорости изъ u_1 въ $u'=u$; поэтому, для y должно будетъ взять выраженіе

$$\frac{(u_1-u)^2}{2g},$$

а слѣдовательно, будемъ имѣть

$$z - z' + \frac{p - p_1}{\Delta} = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Такъ какъ, при переходѣ отъ сѣченія AB къ сѣченію $A'B'$ скорость u не мѣняется, то количество движенія массы $ABA'B'$ жидкости, въ безконечно малый промежутокъ времени, не получаетъ никакого приращенія, а слѣдовательно, внѣшнія силы, дѣйствующія на эту массу и спроектированныя на ось трубы, должны взаимно уравновѣшиваться. Но эти внѣшнія силы суть: во-первыхъ, вѣсъ массы $ABA'B'$, равный ΔAs, гдѣ s есть разстояніе сѣченій AB и $A'B'$, проекція же вѣса на ось трубы есть $\Delta A(z - z')$; во-вторыхъ, давленія на сѣченія AB и $A'B'$, равныя Ap и $-Ap'$, которыхъ проекціи на ось трубы равны самимъ давленіямъ; въ-третьихъ, давленія отъ стѣнокъ трубы, дающія въ проекціи нуль; въ-четвертыхъ, равнодѣйствующая R давленій обѣихъ сторонъ пластинки на жидкость, проектирующаяся въ настоящую величину и дѣйствующая въ сторону, обратную направленію движенія жидкости и, въ-пятыхъ, треніе жидкости о стѣнки трубы, которымъ можно пренебречь; слѣдовательно, теорема количествъ движеній, въ настоящемъ случаѣ, приводитъ къ уравненію

$$R = \Delta A(z - z') + Ap - Ap' = \Delta A\left[z - z' + \frac{p - p'}{\Delta}\right],$$

которое вмѣстѣ съ уравненіемъ (a) даетъ

$$R = \Delta A \frac{(u_1 - u)^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Для опредѣленія скорости u_1 въ сжатомъ сѣченіи mn, если обозначимъ чрезъ μ коэффиціентъ расхода для этого сѣченія, получимъ

$$Q = Au = \mu(A - a)u_1$$

откуда $$u_1 = u\frac{A}{\mu(A - a)}$$

а при этомъ, предъидущее выраженіе для давленія R принимаетъ видъ

$$R = \Delta A \frac{u^2}{2g}\left(\frac{A}{\mu(A-a)} - 1\right)^2 = \Delta a \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{A}{a}\left(\frac{A}{\mu(A-a)} - 1\right)^2$$

или $$R = k\Delta a \frac{u^2}{2g} \text{ гдѣ } k = \frac{A}{a}\left(\frac{A}{\mu(A-a)} - 1\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Теперь постараемся опредѣлить ту составляющую R' давленія R, которая дѣйствуетъ на грань пластинки, обращенную къ притоку жидкости и составляющую R'', дѣйствующая на противуположну грань, обращенную къ истоку. Для этого примѣнимъ теорему Д. Бернулли къ сѣченіямъ $A'B'$ и mn, но, предварительно замѣтимъ, что сѣченіе mn состоитъ изъ двухъ частей: изъ кольцеобразной части $mm'nn'$, чрезъ которую протекающія струйки движутся по линіямъ параллельнымъ, а слѣдовательно, давленіе въ этомъ сѣченіи распредѣляется по законамъ гидростатики и части $m'n'$, въ которой находящіяся частицы жидкости имѣютъ медленное движеніе, и при томъ весьма разнообразное по направленію, такъ что среднее состояніе этихъ частицъ весьма близко къ состоянію покоя, а потому давленіе и въ части $m'n'$ распредѣляется такъ же по законамъ гидростатики. Такимъ образомъ, на всемъ протяженіи сѣченія mn можно опредѣлять давленія по законамъ гидростати; поэтому теорема Д. Бернулли доставитъ намъ уравненіе

$$z_1 + \frac{p_1}{\Delta} + \frac{u_1^2}{2g} = z' + \frac{p'}{\Delta} + \frac{u^2}{2g} + \frac{(u_1 - u)}{2g}$$

откуда, для давленія p_1 въ сѣченіи mn, получаемъ

$$\frac{p_1}{\Delta} = \frac{p'}{\Delta} - (z_1 - z') - \frac{uu_1 - u^2}{g}$$

или $$\frac{p_1}{\Delta} = \frac{p'}{\Delta} - (z_1 - z') - \frac{u^2}{g}\left(\frac{\Delta}{\mu(A-a)} - 1\right).$$

Понятно, что давленіе p_1, опредѣляемое этимъ послѣднимъ уравненіемъ, передается, при помощи слоя $MNm'n'$ жидкости, находящейся почти въ состояніи покоя, всѣмъ точкамъ пластинки MN почти не измѣняясь по величинѣ; поэтому, для давленія R'' на пластинку со стороны истока жидкости можно принять выраженіе

$$R''=p_1 a=a\,[p'-\Delta\,(z_1-z')]-\Delta a\,\frac{u^2}{2g}\,2\left(\frac{\Delta}{\mu(A-a)}-1\right)\cdot \qquad (6)$$

Слѣдовательно, составляющая R', дѣйствующая на пластинку со стороны притока, какъ равная разности $R-(-R'')$, будетъ

$$R'=k\Delta a\frac{u^2}{2g}+a\,[p'-\Delta(z_1-z'')]-\Delta a\,\frac{u^2}{2g}\,2\left(\frac{A}{\mu(A-a)}-1\right)\cdot \qquad (7)$$

Замѣтимъ, что еслибы жидкость, въ трубѣ находящаяся, была въ состояніи покоя, то по данному давленію p' въ сѣченіи $A'B'$, и по даннымъ значеніямъ для z' и z_1, опредѣляющимъ положенія центровъ тяжести сѣченій $A'B'$ и mn, для давленія въ этомъ послѣднимъ сѣченіи, получили бы

$$p'-(z_1-z')\,\Delta,$$

а потому, обозначая это послѣднее давленіе, опредѣляемое по началамъ Гидростатики, буквою p_0, окончательно получимъ слѣдующія формулы для опредѣленія давленій R, R' и R'':

$$\left.\begin{aligned} R&=k\Delta a\,\frac{u^2}{2g}\\ R'&=ap_0+k'\Delta a\,\frac{u^2}{2g}\\ R''&=ap_0-2k''\Delta a\,\frac{u^2}{2g}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

где $\qquad k''=\dfrac{A}{\mu(A-a)}-1,\;\; k=\dfrac{A}{a}\,k''^2$ и $k'=k-2k''$.

Въ выраженіяхъ этихъ *Дюбуа* назвалъ ap_0 *мертвымъ давленіемъ*, $k'\Delta a\,\frac{u^2}{2g}$ *живымъ давленіемъ* и $2k''\Delta a\,\frac{u^2}{2g}$ (*non-pression*) *недавленіемъ*.

79. Выведенныя въ предъидущихъ нумерахъ формулы для давленія движущейся жидкости на поверхность твердаго тѣла, въ нее погруженнаго, могутъ быть, съ извѣстною степенью точности, примѣнены и въ случаѣ, когда давленіе это производится

неопредѣленною массою жидкости, т.-е. когда размѣры поперечнаго сѣченія потока жидкости весьма велики въ сравненіи съ размѣрами твердаго тѣла. Еслибы, напримѣръ, въ потокъ значительныхъ размѣровъ была погружена пластинка, то подобно тому, какъ и въ случаѣ движенія жидкости въ трубѣ, выше разсмотрѣнномъ, нѣкоторыя струйки жидкости уклонятся отъ своего движенія, но это уклоненіе будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ дальше онѣ будутъ проходить отъ пластинки, такъ, что при значительныхъ размѣрахъ поперечнаго сѣченія потока, въ сравненіи съ размѣрами пластинки, это уклоняющее дѣйствіе послѣдней на многія струйки совершенно не распространится; но какъ велика будетъ масса жидкости, уклоняющейся отъ своего движенія дѣйствіемъ пластинки, мы опредѣлить не имѣемъ никакой возможности, а потому и не можемъ опредѣлить давленія жидкости на препятствіе съ тою точностью, какъ въ случаѣ, когда величина этой массы намъ извѣстна.

Если погруженное въ жидкость твердое тѣло само будетъ находиться въ состояніи движенія, то давленіе на его поверхность будетъ зависѣть отъ относительныхъ скоростей частицъ жидкости. Въ этомъ случаѣ, мы всегда имѣемъ право всѣмъ частицамъ жидкости и твердому тѣлу, въ ней находящемуся, сверхъ дѣйствительнаго ихъ движенія, приписать еще и такое общее для всѣхъ точекъ движеніе, отъ котораго твердое тѣло пришло бы въ состояніе покоя; слѣдовательно, имѣемъ право разсматривать твердое тѣло какъ неподвижное, но за то, вмѣсто абсолютнаго движенія частицъ жидкости, разсматривать ихъ относительное движеніе. Такъ, напримѣръ, случай, когда твердое тѣло движется внутри жидкости, находящейся въ покоѣ можно свести на случай, когда неподвижное твердое тѣло находится въ движущейся жидкости. Замѣтимъ, однако, что въ дѣйствительности оба такіе случая не вполнѣ тождественны, какъ это обнаружилъ Дюбуа изъ своихъ опытовъ. Изъ опытовъ его оказалось, что давленіе на неподвижное тѣло потока жидкости движущейся прямолинейно съ извѣстною скоростью, больше, нежели давленіе, испытываемое этимъ тѣломъ, когда оно движется съ такою же скоростью въ неподвижной жидкости. Изъ этихъ опытовъ Дюбуа вывелъ заключеніе, что для разъединенія частицъ

15*

жидкости, находящейся въ движенiи, требуется большее усилiе, нежели для разъединенiя частицъ той же жидкости, находящейся въ покоѣ. Явленiе это, однако, объясняется значительно проще именно тѣмъ, что относительное движенiе частицъ жидкости въ обоихъ случаяхъ не одинаково. Когда жидкость движется въ руслѣ, то различныя частицы ея обладаютъ различными скоростями, зависящими отъ расположенiя ихъ не только въ отношенiи къ тому неподвижному тѣлу, давленiе на которое опредѣляемъ, но и въ отношенiи къ дну и берегамъ русла, между тѣмъ, какъ въ случаѣ движенiя твердаго тѣла въ неподвижной жидкости, скорости, сообщаемыя частицамъ сей послѣдней, зависятъ исключительно только отъ ихъ расположенiя въ отношенiи къ твердому тѣлу, предполагая, само собою разумѣется, что твердое тѣло движется въ потокѣ въ значительномъ разстоянiи отъ дна и береговъ, какъ это и имѣло мѣсто въ опытахъ Дюбуа.

Если вообразимъ внутри потока жидкости пластинку AB, поставленную перпендикулярно къ направленiю движенiя жид кости (фиг. 47), то не трудно видѣть, что струйки, обходя пластинку, должны со стороны притока образовать кривыя, обращенныя выпуклостью къ пластинкѣ, со стороны же истока струйки эти, возвращаясь мало-по-малу къ нормальному ихъ положенiю, должны образовать кривыя обращенныя вогнутостью къ пластинкѣ. Такимъ образомъ, въ смежности съ мѣстомъ, занимаемымъ пластинкою въ потокѣ, частицы жидкости, вмѣсто прямолинейныхъ траэкторiй, будутъ имѣть криволинейныя траэкторiи, а слѣдовательно, во время движенiя по нимъ должны проявиться центробѣжныя силы частицъ со стороны притока, дѣйствующiя по направленiямъ, идущимъ къ пластинкѣ, а со стороны истока, по направленiямъ, идущимъ отъ пластинки. Понятно, что дѣйствiемъ этихъ силъ будетъ то, что давленiе жидкости на пластинку, со стороны притока, будетъ больше

Фиг. 47.

того, какое было бы въ случаѣ равновѣсія, а со стороны истока, напротивъ того, — меньше. Такимъ образомъ, и въ случаѣ пластинки, погруженной въ неопредѣленную массу движущейся жидкости, какъ и въ случаѣ пластинки, находящейся внутри трубы, въ которой движется жидкость, давленіе на нее будетъ состоять изъ мертваго давленія, увеличеннаго на сторонѣ притока живымъ давленіемъ и уменьшеннаго на сторонѣ истока *недавленіемъ*.

Весьма вѣроятно, что для живого давленія и для недавленія можно и здѣсь, какъ въ случаѣ трубы, взять выраженія

$$k'\Delta a\frac{u^2}{2g} \quad \text{и} \quad k''\Delta a\frac{u^2}{2g},$$

но для коэффиціентовъ k' и k'' нужно искать значенія помощью опытовъ. Понятно, также, что равнодѣйствующая R давленій, приложенныхъ къ обоимъ гранямъ пластинки, будетъ опредѣляться формулою

$$R=(k'+k'')\,\Delta a\frac{u^2}{2g},$$

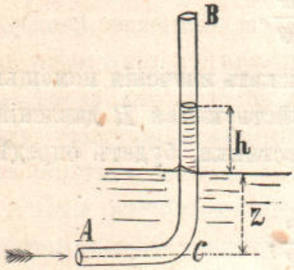
примѣняя которую къ самому общему случаю, должно a разсматривать какъ площадь наибольшаго сѣченія тѣла плоскостями, перпендикулярными къ направленію скорости u, а самую скорость u — какъ относительную скорость жидкости.

Дюбуа дѣлалъ опыты съ пластинкою, съ кубомъ и съ параллелопипедомъ, длина котораго была въ три раза болѣе стороны основанія. Погружая ихъ въ текущую воду онъ нашелъ для всѣхъ трехъ тѣлъ $k'=1{,}19$, но для коэффиціента k'', входящаго въ выраженіе недавленія, онъ нашелъ: для пластинки 0,67, для куба 0,27 и для параллелопипеда 0,15; слѣдовательно, $k'+k''$ будетъ равно, слѣдуя Дюбуа, 1,86 для пластинки, 1,46 для куба и 1,34 для параллелопипеда, такъ что съ увеличеніемъ размѣровъ тѣла, параллельныхъ направленію движенія, при равенствѣ прочихъ обстоятельствъ, полное давленіе R жидкости на него уменьшается *).

*) Разумѣется, этому уменьшенію давленія существуетъ нѣкоторый предѣлъ, такъ какъ, съ увеличеніемъ длины тѣла, будетъ возрастать треніе жидкости о его поверхность, обнаруживающее слабое вліяніе на явленіе сопротивленія при незначительной длинѣ.

80. *Приборы для измѣренія скорости движущейся жидкости.* Изложенные въ предъидущихъ нумерахъ законы давленія движущейся жидкости на твердое тѣло, въ нее погруженное, могутъ послужить намъ для ознакомленія съ дѣйствіемъ, такъ-называемыхъ, *тахометровъ*, т.-е., приборовъ, употребляющихся для опредѣленія скорости движущейся жидкости.

Трубка Пито. Въ 1732 году Пито предложилъ, для опредѣленія скорости въ данной точкѣ A потока, пользоваться стеклянною, съ обоихъ концовъ открытою и подъ прямымъ угломъ загнутою, трубочкою ACB (фиг. 48). Устанавливая эту трубку



Фиг. 48.

въ водѣ такъ, чтобы колѣно BC было вертикально, а колѣно AC горизонтально, и отверстіе A было бы обращено противу теченія, находясь на такой глубинѣ z подъ свободною поверхностью воды въ потокѣ, на которой желаемъ опредѣлить скорость, мы увидимъ, что вода, вошедшая въ колѣно BC, будетъ находиться выше уровня въ потокѣ на нѣкоторую высоту h. Обозначая чрезъ V искомую скорость, чрезъ p давленіе на отверстіе A и чрезъ a площадь этого отверстія, и замѣчая, что вода, находящаяся въ трубкѣ, неподвижна, получимъ для давленія на отверстіе A, со стороны жидкости, находящейся въ трубкѣ, выраженіе

$$pa = \Delta a(z + h);$$

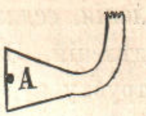
со стороны же движущейся жидкости въ потокѣ, для этого давленія будемъ имѣть

$$pa = \Delta az + k'\Delta a\frac{V^2}{2g},$$

а потому $$h = k'\frac{V^2}{2g} \quad \text{или} \quad V = \sqrt{\frac{1}{k'}2gh}.$$

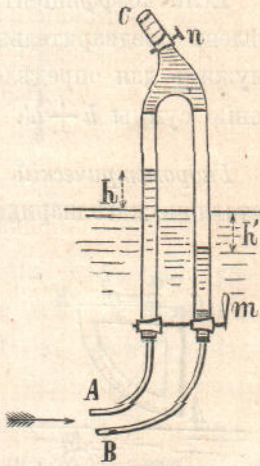
Согласно опытамъ Дюбуа, коэффиціентъ k' равенъ 1,22 при $V = 0{,}78$ метр., 1,11 при $V = 1{,}08$ метр. и 1,08 при $V = 1{,}8$ метр.; такъ, что среднее значеніе этого коэффиціента будетъ 1,15, что весьма близко къ значенію 1,19, данному въ № 79.

Дюбуа предложилъ оконечность A трубки, погружаемую въ воду, дѣлать въ видѣ раструба, снабженнаго дномъ (фиг. 49), въ центрѣ котораго имѣется небольшое отверстіе. Въ этомъ случаѣ, давленіе на оконечность выходитъ больше, а потому и высота h подъема воды въ вертикальномъ колѣнѣ увеличивается, отчего приборъ дѣлается болѣе чувствительнымъ. Для такой трубки съ раструбомъ коэффиціентъ $k' = 1,15$. При опредѣленіи высоты h стоянія уровня воды въ трубкѣ является обыкновенно значительное затрудненіе, такъ какъ вода въ трубкѣ нѣсколько колеблется и въ то же время свободная поверхность воды потока въ мѣстахъ, смежныхъ съ трубкою, нѣсколько измѣняется, приподнимаясь со стороны притока и опускаясь со стороны истока.



Фиг. 49.

Трубка Пито, усовершенствованная Дарси и Баумгартеномъ. Указанный выше недостатокъ трубки Пито вполнѣ устраненъ въ слѣдующей трубкѣ, усовершенствованной Дарси и Баумгартеномъ. Трубка эта имѣетъ два вертикальныхъ колѣна (фиг. 50), сходящихся въ одну общую вѣтвь, снабженную краномъ n. Рукоятка m служитъ для одновременнаго поворачиванія крановъ находящихся въ нижнихъ оконечностяхъ этихъ колѣнъ. Горизонтальныя вѣтви обѣихъ трубокъ снабжены отверстіями A и B, изъ коихъ A находится прямо противу теченія, когда трубка надлежащимъ образомъ установлена въ потокѣ, а отверстіе B сдѣлано внизу въ боковой поверхности трубки (или же, иногда горизонтальное колѣно одной трубки направлено противу теченія, а другой по теченію). При погруженіи такой трубки въ потокъ воды на требуемую глубину, краны m и n открываютъ и тогда вода въ одномъ колѣнѣ, отъ дѣйствія живого давленія на отверстіе, поднимается на высоту h, а въ другомъ колѣнѣ, отъ дѣйствія недавленія, напротивъ того, опускается на вы-



Фиг. 50.

соту h'. Всасывая ртомъ чрезъ оконечность C воздухъ, находящійся въ трубкѣ, можно, не измѣняя относительнаго положенія уровней воды въ обоихъ колѣнахъ, приподнять эти уровни и привести къ тѣмъ частямъ трубки, на которыхъ сдѣланы дѣленія, еслибы первоначальныя положенія уровней лежали внѣ дѣленій. Закрывая затѣмъ краны m и n, можно перенести трубку куда угодно и опредѣлить съ большею точностью сумму $h+h'$, изображающую разстояніе уровней въ колѣнахъ. Понятно, что для такой трубки будемъ имѣть

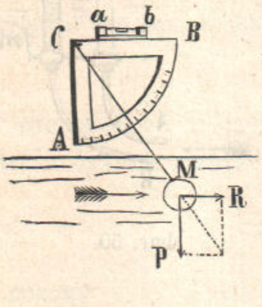
$$h = k'\frac{V^2}{2g} \quad \text{и} \quad h' = k''\frac{V^2}{2g},$$

откуда $$\frac{V^2}{2g} = \frac{h}{k'} = \frac{h'}{k''} = \frac{h+h'}{k'+k''}.$$

Слѣдовательно, $$V = \sqrt{2g\frac{h+h'}{k'+k''}}.$$

Если коэффиціентъ $k'+k''$ для данной трубки будетъ опредѣленъ предварительными опытами, то послѣдняя формула послужитъ для опредѣленія неизвѣстной скорости потока по значенію суммы $h+h'$.

Гидрометрическій маятникъ. Приборъ этотъ состоитъ изъ металлическаго шарика M, привѣшеннаго на нити въ центрѣ C четверти круга ABC, раздѣленнаго на градусы (фиг. 51). При помощи водяного уровня ab, во время опыта, радіусъ CB устанавливаютъ въ горизонтальномъ положеніи и наблюдаютъ уголъ α отклоненія нити маятника отъ вертикальнаго положенія. Обозначая вѣсъ шарика буквою P, діаметръ его буквою b и полное давленіе на него воды буквою R, очевидно, получимъ



Фиг. 51.

$$R = P\operatorname{tang}\alpha,$$

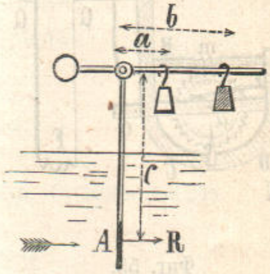
но $$R = k\Delta\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{V^2}{2g};$$

поэтому, для опредѣленія искомой скорости V, будемъ имѣть формулу

$$V=\frac{2}{d}\sqrt{\frac{2gP\tan g\alpha}{k\pi\Delta}},$$

которою и можно будетъ пользоваться, когда предварительными опытами найдено будетъ значеніе коэффиціента k. По трудности наблюденіе угла α, вслѣдствіе сотрясенія шарика во время дѣйствія на него струекъ воды, нельзя ожидать отъ этого прибора большой точности.

Гидрометрическій безмѣнъ. Приборъ этотъ состоитъ изъ пластинки A, прикрѣпленной къ одной оконечности стержня, другой конецъ котораго укрѣпленъ во втулкѣ двуплечнаго рычага, надѣтаго на горизонтальную ось (фиг. 52). Одно плечо рычага имѣетъ противовѣсъ Q, а другое — передвижной грузъ P. Когда пластинка A не подвержена давленію жидкости и рычагъ занимаетъ горизонтальное положеніе, тогда разстояніе груза P отъ оси вращенія, положимъ, равно a; если же пластинка погружена въ потокъ жидкости и испытываетъ нѣкоторое давленіе R, то для удержанія рычага въ горизонтальномъ положеніи необходимо увеличить плечо груза P, отодвигая его далѣе отъ оси вращенія. Пусть b будетъ обозначать плечо груза P въ этомъ случаѣ. Обозначая еще чрезъ C разстояніе центра тяжести пластинки отъ оси вращенія и чрезъ A площадь ея, получимъ, для равновѣсія рычага, когда пластинка погружена въ потокъ, слѣдующее условіе

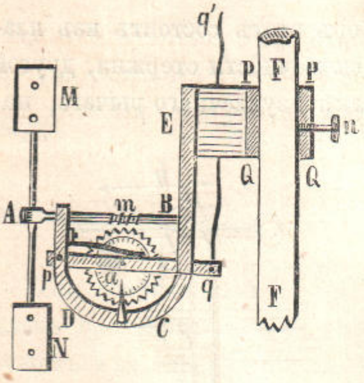


Фиг. 52.

$$k\Delta A\frac{V^2}{2g}C=P(b-a),$$

изъ котораго и опредѣлится скорость V, когда коэффиціентъ k будетъ извѣстенъ.

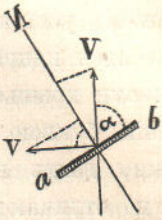
Вольтманова вертушка. Приборъ этотъ состоитъ изъ оси AB, снабженной крыльями MN, на подобіе крыльевъ вѣтренныхъ мельницъ, съ нарѣзаннымъ на ней безконечнымъ винтомъ m (фиг. 53). При помощи шнурка qq' можно приподнять раму pq, въ которой установлена ось зубчатаго колеса a, и такимъ образомъ сцѣпить это колесо съ винтомъ m. Колесо a предназначается для счета оборотовъ оси AB; поэтому, на немъ дѣлаются дѣленія, соотвѣтствующія числу зубцовъ, а на дугѣ DCE, поддерживающей ось крыльевъ, устанавливается неподвижная стрѣлка или указатель. Дуга DCE, при помощи муфты $PPQQ$, снабженной нажимательнымъ винтикомъ n, можетъ быть прикрѣплена къ деревянному стержню FF на требуемомъ разстояніи отъ его нижней оконечности, зависящемъ отъ той глубины, на которой желаемъ опредѣлить скорость потока. При началѣ опыта шнурокъ qq' не натянутъ, поэтому колесо a не сцѣплено съ безконечнымъ винтомъ m. Колесо это устанавливаютъ такъ, чтобы нуль дѣленія на немъ находился противу указателя, затѣмъ



Фиг. 53.

погружаютъ вертушку въ потокъ и при помощи стержня FF устанавливаютъ ее такъ, чтобы ось AB крыльевъ была параллельна направленію движенія воды. Когда вертушка, такимъ образомъ, будетъ установлена въ потокѣ, въ извѣстное мгновеніе, замѣчаемое по часамъ, сцѣпляютъ, при помощи шнурка qq', счетный приборъ съ винтомъ m оси, отчего вращеніе этой послѣдней, производимое давленіемъ воды на крылья, будетъ передаваться и счетному прибору. По прошествіи извѣстнаго промежутка времени, замѣчаемаго по часамъ, шнурокъ qq' дѣлаютъ свободнымъ, отчего винтъ m разобщается съ колесомъ a и вращеніе сего послѣдняго останавливается. Затѣмъ вынимаютъ вертушку изъ воды и опредѣляютъ число оборотовъ, по указаніямъ счетнаго прибора, какое сдѣлала вертушка во все время продолжительности опыта. Раздѣляя же это число оборотовъ на время, получаютъ число оборотовъ оси вертушки въ единицу времени, по которому и заключаютъ о скорости потока. Не трудно составить себѣ понятіе, какова должна быть зависимость между этою скоростью и числомъ оборотовъ.

Положимъ, что крыло вертушки есть плоскость, наклоненная къ оси ея AB подъ угломъ α. Пусть на фиг. 54 ab представляетъ сѣченіе крыла горизонтальною плоскостью въ то время, когда радіусъ этого крыла находится въ вертикальномъ положеніи, N — нормаль къ плоскости крыла и V направленіе скорости воды, а слѣдовательно, и направленіе оси вращенія крыла. Наконецъ, пусть v абсолютная скорость движенія центра тяжести площади A крыла. Проектируя скорости V и v на нормаль N, получимъ, для относительной нормальной къ плоскости крыла скорости воды, выраженіе



Фиг. 54.

$$V \sin\alpha - v \cos\alpha,$$

а потому, для давленія воды на крыло, будемъ имѣть

$$h\Delta A \frac{(V \sin\alpha - \cos\alpha)^2}{2g};$$

умножая же это давленіе на разстояніе r центра тяжести площади A крыла отъ оси вращенія, и затѣмъ на число n крыльевъ, получимъ слѣдующее выраженіе для момента M движущаго вертушку усилія

$$M = kn\Delta A \frac{V^2 \sin^2\alpha - 2Vv \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + v^2 \cos^2\alpha}{2g} \,.\, r.$$

Но обозначая чрезъ $\tilde{\omega}$ угловую скорость вращенія оси крыльевъ, получимъ

$$v = \tilde{\omega} \,.\, r,$$

поэтому, предъидущее выраженіе для момента можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ

$$M = aV^2 - bV\tilde{\omega} + c\tilde{\omega}^2,$$

гдѣ a, b и c суть нѣкоторыя постоянныя, для данной вертушки, количества, зависящія отъ ея размѣровъ и отъ коэффиціента k.

Сопротивленія вращенію вертушки, очевидно, состоятъ изъ двухъ частей: изъ сопротивленій постоянныхъ, независящихъ отъ скорости ея вращенія и сопротивленій перемѣнныхъ, зависящихъ отъ скорости, именно возрастающихъ вмѣстѣ съ скоростью или, что одно и то же, возрастающихъ вмѣстѣ съ возрастаніемъ усилія движущаго (къ числу послѣднихъ сопротивленій относится, напримѣръ, сопротивленіе, встрѣчаемое радіусами или ручками крыльевъ). Обозначая моментъ постоянныхъ сопротивленій буквою m, для момента перемѣнныхъ сопротивленій можно взять выраженіе, сходное по виду съ выраженіемъ для M, но отличающееся отъ него только постоянными a, b и c. Такимъ образомъ, условіе равномѣрнаго вращенія вертушки можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$aV^2 - bV\varpi + c\varpi^2 = m + a'V^2 - b'V\varpi + c'\varpi^2.$$

Замѣняя здѣсь угловую скорость вращенія числомъ, ей пропорціональнымъ, именно числомъ N оборотовъ оси вертушки въ единицу времени и перенося всѣ члены въ первую часть уравненія, окончательно, приведемъ предъидущее уравненіе къ слѣдующему виду:

$$V^2 - 2pVN + qN^2 - s = 0,$$

въ которомъ p, q и s будутъ постоянныя для данной вертушки количества, значенія которыхъ должно будетъ поискать помощью предварительныхъ опытовъ. Разрѣшая же послѣднее уравненіе, найдемъ

$$V = pN + \sqrt{(p^2 - q)N + s}.$$

Такъ какъ при $N = 0$, формула даетъ $V = \sqrt{s}$, то $\sqrt{s}$ и представитъ собою меньшій предѣлъ тѣхъ скоростей потока, которыя могутъ быть опредѣлены вертушкою. Если скорость V будетъ менѣе $\sqrt{s}$, то вертушка будетъ оставаться въ потокѣ неподвижною; поэтому количество $\frac{1}{s}$ можно назвать степенью чувствительности вертушки.

Выведенная выше формула для скорости V воды, въ зависимости отъ числа оборотовъ, можетъ быть примѣнена и къ прибору, извѣстному подъ именемъ *анемометра,* имѣющаго устройство, сходное съ описанною выше вертушкою, но употребляющагося при опредѣленіи скорости движенія воздуха.

Сверхъ описанныхъ выше тахометровъ, существуетъ еще много приборовъ, предназначенныхъ для той же цѣли, какъ напримѣръ тахометръ *Брюнингса,* рычагъ *Лорнья,* водяной флюгеръ *Хименеса* и т. п., но говорить здѣсь о всѣхъ этихъ приборахъ мы считаемъ излишнимъ *), а потому и переходимъ къ опредѣленію скорости помощью поплавковъ.

Поплавки. Для опредѣленія скорости воды, на поверхности большихъ рѣкъ и каналовъ, обыкновенно, пользуются поплавками, то-есть такими твердыми тѣлами, которыя плаваютъ на поверхности воды. Если предположимъ, что поплавокъ движется со скоростью воды на поверхности, то для опредѣленія этой скорости нужно будетъ только измѣрить пройденное поплавкомъ пространство, въ теченіи извѣстнаго промежутка времени, и раздѣлить это пространство на время. Повторяя такой опытъ съ поплавкомъ нѣсколько разъ, можно будетъ вывести наивѣроятнѣйшій результатъ, взявъ среднюю ариѳметическую изъ этихъ наблюденій. Чтобы указанія поплавка были по возможности ближе къ истиннымъ, нужно, чтобы изъ воды выступала какъ можно меньшая часть поплавка, такъ какъ самый слабый вѣтеръ можетъ значительно вліять на его движенія. Поплавокъ не долженъ такъ же погружаться много подъ свободною поверхностью, такъ какъ въ этомъ случаѣ онъ укажетъ не скорость на поверхности, но нѣкоторую среднюю скоростей многихъ струекъ потока. Слѣдовательно, лучшая форма поплавка есть форма пластинки съ небольшимъ выступомъ на срединѣ, который одинъ и выходилъ бы изъ воды наружу. Чтобы опредѣленіе, проходимаго поплавкомъ пространства, возможно было сдѣлать съ наибольшею точностью, необходимо пускать его на срединѣ рѣки или канала, въ томъ мѣстѣ, гдѣ скорость наиболь-

*) Описаніе этихъ приборовъ можно найти во многихъ гидравликахъ и между прочимъ въ гидромеханикѣ Рюльмана.

шая, избирая для опыта часть русла по возможности болѣе прямолинейную и съ постояннымъ сѣченіемъ. При опредѣленіи скорости движенія воды въ небольшихъ ручьяхъ, весьма хорошимъ поплавкомъ можетъ служить облатка; растворясь нѣсколько въ водѣ, она образуетъ вокругъ себя тонкій слой клейкаго вещества, которое весьма хорошо свяжетъ частицы воды съ ея поверхностью, такъ что скорость движенія такого поплавка будетъ со всею строгостью равна скорости движенія воды, чего не бываетъ съ обыкновенными поплавками. Дѣйствительно, скорость твердаго тѣла, уносимаго потокомъ на его поверхности, непремѣнно должна быть нѣсколько болѣе скорости самаго потока, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ слѣдующаго: поплавокъ, положенный на поверхность воды, не сейчасъ принимаетъ ту скорость, какая существуетъ на этой поверхности, вслѣдствіе инерціи своей массы; слѣдовательно, первоначально онъ движется медленнѣе воды, а потому въ это время движеніе его должно ускоряться дѣйствіемъ двухъ силъ: давленіемъ на него струекъ воды и собственнымъ вѣсомъ (поплавокъ, находясь на поверхности текущей воды, находится какъ бы на наклонной плоскости). Когда скорость поплавка сдѣлается равною скорости воды, давленія на него отъ сей послѣдней взаимно уравновѣсятся, но дѣйствіемъ собственнаго вѣса поплавка скорость его будетъ продолжать возрастать; при этомъ опять начнется дѣйствіе давленія воды, но уже какъ силы, сопротивляющейся движенію, такъ что когда эта послѣдняя сила уравновѣситъ составляющую вѣса поплавка, идущую по направленію движенія, то-есть когда движеніе поплавка сдѣлается равномѣрнымъ, скорость его будетъ болѣе скорости воды. Но понятно, что разница въ скоростяхъ поплавка и воды всегда будетъ чрезвычайно мала, если только поплавокъ будетъ имѣть значительную поверхность въ сравненіи съ его вѣсомъ, напримѣръ, если будетъ пустымъ внутри.

Поплавки могутъ служить и для опредѣленія скорости на нѣкоторой глубинѣ подъ свободною поверхностью. Для этого нужно только къ поплавку, плавающему на поверхности, привѣсить, при помощи нити или проволоки, другой поплавокъ, тяжелѣйшій воды. Два поплавка, такимъ образомъ связанныхъ, будутъ двигаться со скоростью, среднею той, какая существуетъ на поверхности, и той, какая существуетъ на глубинѣ второго, погруженнаго въ воду, поплавка. Пусть v будетъ эта послѣдняя скорость, V — скорость на поверхности и w наблюдаемая скорость, общая обоимъ поплавкамъ; тогда $w = \frac{1}{2}(V + v)$, а слѣдовательно $v = 2w - V$.

Въ случаяхъ, не требующихъ большой точности, средняя скорость поперечнаго сѣченія потока, познаніе которой нужно для рѣшенія многихъ практическихъ вопросовъ, опредѣляется обыкновенно помощью эмпирическихъ формулъ, когда наибольшая скорость на поверхности будетъ опредѣлена по одному изъ указанныхъ выше способовъ.

Эмпирическія формулы для скоростей воды въ рѣкахъ и каналахъ.

Пусть V обозначаетъ наибольшую скорость на поверхности, а v среднюю скорость на данномъ перпендикулярѣ къ поверхности, то

$$v = 0{,}937\,V - 0{,}0252\,V^2 \text{ метр.}$$

Если W будетъ скорость на днѣ, а h — глубина, то

$$W = (0{,}8617 - 0{,}0469\,h)\,V \text{ метр.}$$

Если w будетъ скорость на нѣкоторой глубинѣ z, то

$$w = [h - (0{,}1383 + 0{,}0469\,h)\,z]\,\frac{v}{h} \; ^{*)}.$$

Прони для средней скорости U въ поперечномъ сѣченіи даетъ формулу

$$U = V\,\frac{V + 2{,}372}{V + 3{,}153} \text{ метр.};$$

въ случаѣ же, когда наибольшая скорость V лежитъ въ предѣлахъ 0,2 до 1,5 метр., можно взять

$$U = 0{,}816\,V \quad \text{или} \quad 0{,}8\,V.$$

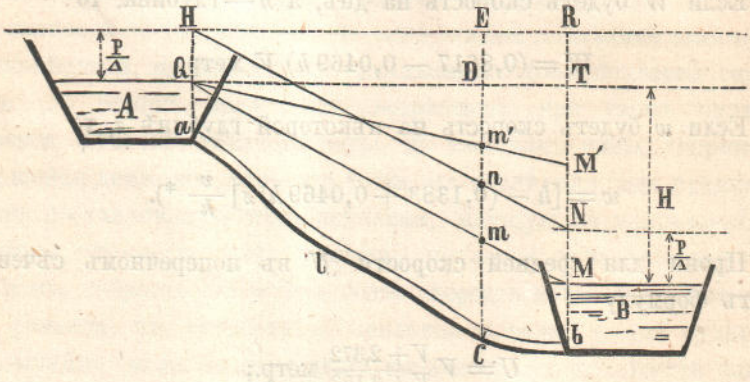
*) Формулы эти взяты изъ Гидромеханики Рюльмана.

Движеніе воды въ водопроводной сѣти.

Теоретическія данныя для составленія проекта сѣти.

Простой водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ.

81. Начнемъ разсмотрѣніе обстоятельствъ движенія воды въ водопроводной сѣти съ рѣшенія слѣдующей задачи: *даны два резервуара* A и B (фиг. 55), *сообщающіеся между собою помощью*



Фиг. 55.

трубы ab, *съ постояннымъ діаметромъ* D *и длиною, равною* L; *требуется опредѣлить количество воды* Q, *доставляемое нижнему резервуару въ единицу времени, если извѣстно, что разность уровней резервуаровъ постоянна и равна* H.

Пусть будетъ V и V_1 скорости на свободныхъ поверхностяхъ резервуаровъ A и B; A и A_1 площади этихъ поверхностей; u и a средняя скорость и площадь сѣченія трубы, равная $\frac{\pi D^2}{4}$; v и a_1 скорость въ отверстіи b, чрезъ которое вода вливается въ нижній резервуаръ и площадь этого отверстія; P давленіе атмосферы на единицу поверхности *); p давленіе въ нѣкоторомъ сѣченіи C трубы, взятомъ на разстояніи l отъ начала трубы, считая по ея оси; Y и y напоры, потерянные на гидравлическія сопротивленія, первый—на всемъ протяженіи отъ уровня въ верхнемъ резервуарѣ до уровня въ нижнемъ, а второй—на пути отъ уровня въ верхнемъ резервуарѣ до сѣченія C трубы; наконецъ, z вертикальное разстояніе, считаемое сверху внизъ, отъ уровня воды въ верхнемъ резервуарѣ до центра сѣченія C трубы.

Въ силу сдѣланнаго предположенія, что разность уровней, а слѣдов. и положеніе ихъ въ каждомъ изъ резервуаровъ A и B, не мѣняется съ теченіемъ времени, можемъ движеніе принимать за установившееся и примѣнить къ нему теорому Д. Бернулли. Вообразимъ частицу воды, занимающую послѣдовательно слѣдующихъ три положенія на своей траэкторіи: на уровнѣ воды верхняго резервуара, въ центрѣ сѣченія C трубы и, наконецъ, на уравнѣ воды нижняго резервуара; тогда, на основаніи теоремы Д. Бернулли, исправленной членами, зависящими отъ гидравлическихъ сопротивленій, получимъ слѣдующихъ два уравненія:

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{P}{\Delta}=\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\Delta}-z+y=\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P}{\Delta}-H+Y \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

къ которымъ присоединяются еще уравненія, выражающія условіе неразрывности массы жидкости:

$$AV=A_1V_1=au=Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Остается опредѣлить высоты y и Y. При опредѣленіи этихъ высотъ мы не будемъ обращать вниманіе на треніе, существую-

*) Давленіе это на одинъ квадратный метръ равняется 10333 килограмма.

щее внутри резервуаровъ A и B, вслѣдствіе весьма незначительной скорости движенія воды въ нихъ, а также будемъ пренебрегать сопротивленіями въ изгибахъ и закругленіяхъ трубы; тогда высота y будетъ состоять изъ слѣдующихъ напоровъ: изъ напора, потраченнаго на сжатіе, являющееся при переходѣ воды изъ верхняго резервуара въ трубу и изъ напора, потраченнаго на треніе въ трубѣ на длинѣ ея l. Высота же Y будетъ состоять: изъ напора, потраченнаго на сжатіе при входѣ въ трубу; изъ напора, потеряннаго на треніе на всей длинѣ L трубы и изъ напора, потеряннаго на ударъ при входѣ воды въ нижній резервуаръ B. Упомянутые же напоры, согласно сказанному въ №№ 56, 57 и 62, опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

Напоръ, потерянный на сжатіе при входѣ воды въ трубу, равенъ (форм. 47 № 57)

$$\frac{Q^2}{2ga^2}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2=\frac{u^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2,$$

гдѣ $\mu=0{,}62$, а слѣд. $\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2=0{,}38$. Въ виду того, что нѣкоторыя изъ сопротивленій совершенно не принимаются во вниманіе, благоразумнѣе будетъ этотъ коэффиціентъ нѣсколько увеличить; мы примемъ $\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2=0{,}50$.

Напоръ, теряющійся на ударъ, при входѣ воды въ нижній резервуаръ, равенъ (форм. 46 № 57)

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu a_1}-\frac{1}{A_1}\right)^2=\frac{u^2}{2g}\left(\frac{a}{\mu a_1}-\frac{a}{A_1}\right)^2.$$

Наконецъ, напоръ, теряющійся на треніе на длинѣ l трубы, можетъ быть принятъ равнымъ (форм. 68 и 69 № 62)

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{D}\right)\frac{4l}{D}u^2=\left(\alpha+\frac{\beta}{D}\right)\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\frac{Q^2l}{D^5},$$

гдѣ $\alpha=0{,}000507$ и $\beta=0{,}00001294$, или съ нѣсколько меньшею степенью точности:

$$\alpha=0{,}000625 \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Принимая эти послѣднія значенія для α и β, можно напоръ, теряющійся на треніе, принимать равнымъ

$$\frac{Q^2 l}{\gamma D^5} \text{ метровъ,}$$

гдѣ $\gamma = (15{,}7)^2$ или почти 16^2 *).

Такимъ образомъ для высотъ y и Y получаются формулы:

$$y = 0{,}50\frac{Q^2}{2ga^2} + \frac{Q^2 l}{\gamma D^5} \quad \text{и} \quad Y = 0{,}50\frac{Q^2}{2ga^2} + \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} + \frac{Q^2}{2ga^2}\left(\frac{a}{\mu a_1} - \frac{a}{A_1}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Внося эти значенія для y и Y въ уравненія (a) и выражая въ нихъ скорости V, V_1 и u чрезъ расходъ Q, помощью условій (b), получимъ два уравненія, изъ которыхъ найдемъ какъ Q, такъ и давленіе p въ данномъ сѣченіи трубы. Выраженія для Q и p, которыя такимъ образомъ получатся, будутъ довольно сложны; между тѣмъ какъ ихъ можно упростить, безъ чувствительной погрѣшности. Дѣйствительно, діаметру водопроводной трубы обыкновенно придаютъ такую величину, чтобы скорость u воды въ трубѣ была близка къ *одному метру*; слѣдов. высота $\frac{u^2}{2g}$ всегда близка къ $\frac{1}{2g} = \frac{1}{2 \times 9{,}81}$, т.-е. близка къ $\frac{1}{20}$ метра, что составляетъ менѣе чѣмъ $\frac{1}{200}$ часть высоты $\frac{P}{\Delta}$, измѣряющей атмосферное давленіе **). Высоты же $\frac{V^2}{2g}$ и $\frac{V_1^2}{2g}$ несравненно меньше высоты $\frac{u^2}{2g}$, такъ какъ площади A и A_1 сѣченій резервуаровъ всегда значительно превосходятъ площадь a сѣченія трубы. Такимъ образомъ въ уравненіяхъ (a) и (c) можно отбросить члены $\frac{V^2}{2g}$, $\frac{V_1^2}{2g}$ и $\frac{v^2}{2g}$ и разсматривать отношенія $\frac{a}{A}$ и $\frac{a}{A_1}$ какъ весьма малыя дроби. Тогда уравненія (a) и (c) превратятся въ слѣдующія:

---

*) Дюпюи принимаетъ $\gamma = 20^2$; но такое значеніе нѣсколько сильно.

**) $\frac{P}{\Delta} = \frac{10333}{1000} = 10\frac{1}{3}$ метровъ.

$$\frac{P}{\Delta}=\frac{p}{\Delta}-z+y=\frac{P}{\Delta}-H+Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y=\frac{Q^2 l}{\gamma D^5} \quad \text{и} \quad Y=\frac{Q^2 L}{\gamma D^5}+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu a_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если назовемъ буквою δ діаметръ отверстія, чрезъ которое должна протекать вода въ моментъ перехода изъ трубы въ нижній резервуаръ, тогда будемъ имѣть $a_1=\frac{\pi\delta^2}{4}$ и уравненіе (2) можно будетъ представить въ слѣдующемъ простѣйшемъ видѣ:

$$Y=\frac{Q^2 L}{\gamma D^5}\left[1-\frac{28}{\mu^2}\left(\frac{D}{\delta}\right)^4\cdot\frac{D}{L}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2 \text{ bis})$$

Если отверстіе a_1 будетъ вполнѣ отрыто, т.-е. если $\delta=D$, тогда $\mu=1$ и для Y будемъ имѣть:

$$Y=\frac{Q^2 L}{\gamma D^5}\left[1+28\frac{D}{L}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Но въ дѣйствительности отношеніе $\frac{D}{L}$ бываетъ настолько малою дробью, что количество $28\frac{D}{L}$ можетъ быть отброшено предъ единицею, и, вмѣсто формулы (3), можно брать слѣдующую

$$Y=\frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3 \text{ bis})$$

формулою же (2 bis) придется пользоваться тогда только, когда отверстіе a_1 будетъ не вполнѣ открыто, т.-е. когда δ будетъ значительно меньше D.

Уравненіе (1) даетъ намъ $Y=H$; поэтому, на основаніи формулы (3 bis), имѣемъ:

$$Y=H=\frac{Q^2 L}{\gamma D^5}, \quad \text{откуда} \quad Q=\sqrt{\frac{\gamma D^5 H}{L}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Понятно, что эта послѣдняя формула предполагаетъ, что существующій напоръ H теряется на одно треніе въ трубѣ, т.-е. что всѣ прочія гидравлическія сопротивленія ничтожно малы въ сравненіи съ треніемъ. Такое предположеніе и будетъ позволительнымъ, при значительной длинѣ трубы и при условіи, что площадь отверстія, существующаго на оконечности трубы, почти равна площади сѣченія трубы. Въ случаѣ, однако, еслибы это послѣднее условіе не имѣло мѣста, нужно пользоваться формулами:

$$Y = H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5}\left[1 + \frac{28}{\mu^2} \cdot \frac{D}{L} \cdot \left(\frac{D}{\delta}\right)^4\right], \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

откуда

$$Q = \sqrt{\frac{\gamma D^5 H}{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{28}{\mu^2} \cdot \frac{D}{L}\left(\frac{D}{\delta}\right)^4}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Наконецъ, изъ уравненія (1) получаемъ, для опредѣленія давленія p въ сѣченія C трубы, слѣдующую формулу

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + z - y = \frac{P}{\Delta} + z - \frac{Q^2 l}{\gamma D^5} = \frac{P}{\Delta} + z - \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \cdot \frac{l}{L} \quad . \quad (7)$$

или

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + z - \frac{H}{1 + \frac{28}{\mu^2} \cdot \frac{D}{L}\left(\frac{D}{\delta}\right)^4} \cdot \frac{l}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Въ случаѣ же, когда отверстіе на оконечности трубы будетъ вполнѣ открыто,

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + z - H\frac{l}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8 \text{ bis})$$

82. Еслибы труба ab (фиг. 55) доставляла воду не въ резервуаръ B, но выпускала бы струю въ атмосферу чрезъ какое-либо отверстіе, сдѣланное въ тонкой стѣнкѣ, или же снабженное короткою трубочкою (мундштукомъ), то тогда напоръ H тратился бы, во-первыхъ, на треніе въ трубѣ и, во-вторыхъ, на сообщеніе вытекающей струѣ скорости c; т.-е. тогда имѣли бы формулу:

$$H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} + \frac{c^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Но называя буквою $\tilde{\omega}$ площадь отверстія, имѣемъ

$$\mu\tilde{\omega} \,.\, c = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

а слѣдов.,

$$H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} + \frac{Q^2}{2g\mu^2\tilde{\omega}^2} = \frac{Q^2}{2g\mu^2\tilde{\omega}^2}\left(1 + 2g\mu^2\tilde{\omega}^2\frac{L}{\gamma D^5}\right)$$

откуда находимъ:

$$Q = \mu\tilde{\omega}\sqrt{\frac{2gH}{1+2g\mu^2\tilde{\omega}^2\frac{L}{\gamma D^5}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Изъ сравненія же этой послѣдней формулы съ (10) видимъ, что

$$c = \sqrt{\frac{2gH}{1+2g\mu^2\tilde{\omega}^2\frac{L}{\gamma D^5}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Но вода, вытекающая изъ оконечности со скоростью c, можетъ, при надлежащемъ расположеніи оконечности трубы, образовать *фонтанъ*, бьющій вверхъ на высоту h, опредѣляемую изъ формулы $c=\sqrt{2gh}$; поэтому, для высоты h этого фонтана имѣемъ выраженіе:

$$h = \frac{H}{1+2g\mu^2\tilde{\omega}^2\frac{L}{\gamma D^5}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Въ дѣйствительности, однако, высота фонтана будетъ нѣсколько меньше найденной, по причинѣ существованія тренія струи о воздухъ и сопротивленій, происходящихъ отъ встрѣчи струи съ частицами воды, падающими внизъ. Если дѣйствительную высоту подъема воды назовемъ чрезъ z, то, на основаніи опытовъ Маріотта *), зависимость между истинною высотою z и теоретическою h (опредѣляемою по формулѣ 13) есть слѣдующая: $h = z + 0{,}01z^2$, гдѣ z и h должно выразить въ метрахъ.

Помощью этихъ формулъ можно сдѣлать разсчетъ фонтана слѣдующимъ образомъ, считая данными напоръ H надъ отверстіемъ, расходъ Q воды, высоту z фонтана и длину L трубы, а неизвѣстными величинами—діаметръ D трубы и площадь $\tilde{\omega}$ отверстія.

По данной высотѣ z опредѣляемъ, помощью формулы Маріотта, высоту h, зная которую, находимъ $c=\sqrt{2gh}$; затѣмъ на-

*) Oeuvres des M. Mariotte. T. II. 1717.

ходимъ площадь $\bar{\omega}$ отверстія изъ формулы $\mu\bar{\omega}.c = Q$ и, наконецъ, діаметръ D трубы изъ формулы (9), которая даетъ

$$D = \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{(\gamma H - h)}}.$$

83. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію формулы (7), опредѣляющей такъ-называемое *внутреннее давленіе* p въ данномъ сѣченіи трубы, взятомъ на разстояніи l, считая отъ начала трубы. Чтобы результаты, доставляемые этою формулою, сдѣлать наглядными, условимся высоту $\frac{p}{\Delta}$, измѣряющую внутреннее давленіе, равно какъ и высоту $\frac{p-P}{\Delta}$, измѣряющую такъ-называемое *дѣйствительное давленіе*, получающееся изъ внутренняго, чрезъ вычитаніе изъ него наружнаго атмосфернаго давленія P, откадывать на вертикальной прямой, проведенной изъ центра тяжести сѣченія C (фиг. 55), считая отъ этого центра вверхъ. Чтобы выполнить такое построеніе, проведемъ горизонтальную плоскость HR, отстоящую отъ плоскости, представляющей свободную поверхность воды въ верхнемъ резервуарѣ, на высоту, равную $\frac{P}{\Delta}$ ($10\frac{1}{3}$ метровъ) и возставимъ перпендикуляръ CE къ этой плоскости; тогда по чертежу получимъ:

$$\overline{ED} = \frac{P}{\Delta} \text{ и } \overline{DC} = z.$$

Затѣмъ по заданной длинѣ l части ac трубы опредѣляемъ высоту $\frac{Q^2 l}{\gamma D^5}$, затраченную на треніе, и откладываемъ ее по вертикали внизъ, разъ отъ точки E и другой разъ отъ точки D; тогда получимъ на прямой EC двѣ точки, n и m, разстоянія которыхъ отъ центра сѣченія C будутъ:

$$\left.\begin{aligned} Cn &= CD + DE - En = z + \frac{P}{\Delta} - \frac{Q^2 l}{\gamma D^5} = z + \\ &\qquad + \frac{P}{\Delta} - \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \cdot \frac{l}{L} = \frac{p}{\Delta} \\ Cm &= CD - Dm = z - \frac{Q^2 l}{\gamma D^5} = z - \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \cdot \frac{l}{P} = \frac{p-P}{\Delta} \end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Послѣдняя высота Cm, измѣряющая дѣйствительное давленіе $p - P$, есть собственно піезометрическая высота въ сѣченіи C, такъ какъ въ открытой съ обоихъ концовъ трубочкѣ, вставленной въ отверстіе, сдѣланное въ стѣнкѣ трубы противу сѣченія C, вода поднялась бы до высоты, равной Cm.

Сдѣлавъ указанное построеніе для каждаго сѣченія трубы мы получимъ два ряда точекъ такихъ, какъ n и m. Первый рядъ будетъ принадлежать *кривой внутреннихъ давленій*, а второй — *кривой дѣйствительныхъ давленій*. Такъ какъ для перваго сѣченія a трубы $l = 0$ и $z = \overline{aQ}$, то на фигурѣ 55 точка H принадлежитъ кривой внутреннихъ давленій, а точка Q кривой дѣйствительныхъ давленій. Для послѣдняго сѣченія трубы $l = L$ и $z = \overline{TM} + \overline{Mb} = H + h$, гдѣ мы буквою h обозначили глубину $\overline{Mb}$ погруженія центра сѣченія b подъ свободною поверхностью нижняго резервуара. Слѣдов. для сѣченія b имѣемъ

$$\frac{p-P}{\Delta} = H + h - \frac{Q^2 L}{\gamma D^5},$$

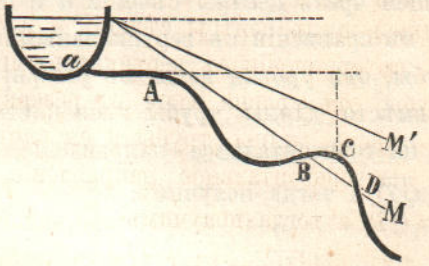
поэтому, если обстоятельства истеченія воды въ нижній резервуаръ таковы, что можно пользоваться формулою (4) (если отверстіе въ сѣченіи b вполнѣ открыто), то тогда $\frac{p-P}{\Delta} = h$ и кривая дѣйствительныхъ давленій пройдетъ чрезъ точку M, а внутреннихъ давленій—чрезъ точку N. Если же отверстіе не будетъ вполнѣ открыто, тогда нужно будетъ пользоваться формулами (5) и (8) и тогда точки M и N расположатся на прямой bT выше. Если отверстіе въ сѣченіи b будетъ закрыто, а слѣдов. вода въ трубѣ будетъ находиться въ состояніи покоя, тогда $Q = 0$ и $\frac{p-P}{\Delta} = H + h = \overline{bT}$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ гидродинамическія давленія въ сѣченіяхъ трубы превратятся въ гидростатическія и линія дѣйствительныхъ давленій превратится въ проекцію оси трубы на горизонтальную плоскость QT, т.-е. на плоскость, служащую продолженіемъ свободной поверхности воды въ верхнемъ резервуарѣ.

Изъ самаго построенія кривыхъ внутреннихъ и дѣйствительныхъ давленій видно, что разстоянія точекъ этихъ кривыхъ отъ горизонтальной плоскости HR не зависятъ отъ разстояній z, такъ что, приподнимая выше или же опуская ниже какую-либо часть водопроводной трубы, мы не измѣнимъ расположенія точекъ тѣхъ частей кривыхъ, которыя относятся къ этой части водопровода, но давленія для сѣченій этой части измѣнятся. Давленія эти, очевидно, увеличатся въ случаѣ пониженія сѣченій и уменьшатся въ случаѣ повышенія.

Предположимъ, что ось трубы лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ центры сѣченій a и b, и что длина L весьма велика, въ сравненіи съ вертикальными разстояніями z точекъ оси трубы, отъ уровня воды въ резервуарѣ A. Въ такомъ случаѣ, вмѣсто длины трубы и ея частей, можно брать проекціи ихъ на горизонтальное направленіе, т.-е. принимать $l = \overline{QD}$ и $L = \overline{QT}$, а тогда получимъ:

$$\overline{Dm} = \zeta = \frac{Q^2 l}{\gamma D^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи можно l разсматривать какъ горизонтальную абсциссу, а $\overline{Dm} = \zeta$, какъ вертикальную ординату кривой дѣйствительныхъ давленій. Слѣдов., при значительной длинѣ L водопроводной трубы, кривыя линіи дѣйствительныхъ и внутреннихъ давленій можно разсматривать какъ параллельныя прямыя, изъ коихъ первая проходитъ чрезъ точку Q, а вторая чрезъ точку H. Прямыя эти наклонены къ горизонтальной прямой QT подъ угломъ, коего тангенсъ равенъ $\frac{Q^2}{\gamma D^5}$. Когда отверстіе въ b вполнѣ открыто, прямыя эти будутъ QM и HN, если же начнемъ уменьшать величину отверстія въ b, расходъ Q будетъ уменьшаться а съ нимъ вмѣстѣ будетъ уменьшаться и уголъ наклоненія прямыхъ къ горизонту; т.-е. прямыя эти будутъ приподниматься, вращаясь первая около точки Q, а вторая около точки H. Опредѣленіе положенія линіи дѣйствительныхъ давленій, въ каждомъ частномъ случаѣ, весьма важно, такъ какъ линія эта даетъ возможность опредѣлить давленіе въ каждомъ сѣченіи трубы, а слѣдов. найти и наибольшее его значеніе, отъ величины котораго должна зависѣть толщина стѣнокъ трубы. Сверхъ того, положеніемъ этихъ линій объясняются нѣкоторыя явленія, замѣчаемыя въ водопроводныхъ трубахъ, на первый взглядъ кажущіяся странными. Такъ, напр., еслибы труба имѣла видъ $aABCD$ (фиг. 56), а линія дѣйствительныхъ давленій была бы прямая QM, тогда въ части BCD, лежащей выше этой прямой, дѣйствительное давленіе $p - P$ было бы отрицательнымъ, т.-е. врутреннее давленіе p было бы меньше атмосфернаго давленія P и потому, еслибы



Фиг. 56.

гдѣ-либо на части BCD былъ поставленъ кранъ, онъ не давалъ бы воды, хотя эта часть трубы и находится ниже уровня воды въ верхнемъ резервуарѣ; сѣченіе же A трубы, какъ лежащее ниже прямой QM, давало бы воду, хотя оно расположено выше части BCD. Съ уменьшеніемъ расходованія на оконечности водопроводной трубы, прямая QM можетъ принять положеніе QM' и тогда часть BCD начнетъ давать воду.

Необходимо замѣтить, что вода, находившаяся въ соприкосновеніи съ воздухомъ, всегда содержитъ нѣкоторое количество сего послѣдняго въ растворѣ и освобождается отъ него, когда давленіе уменьшается; поэтому, въ случаѣ существованія въ водопроводной трубѣ такой части, какъ BCD, внутри которой давленіе меньше атмосфернаго, въ части этой мало-по-малу накопляется воздухъ, освобождающійся изъ раствора, и его можетъ накопиться столько, что струя воды прервется и движеніе въ трубѣ прекратится. Понятно, слѣдовательно, что при укладкѣ водопровода необходимо имѣть въ виду, чтобы ни одна часть его не лежала выше линіи дѣйствительныхъ давленій. Въ случаѣ, еслибы этому условію, почему-либо, удовлетворить было невозможно, нужно было бы, для устраненія воздуха, накопляющагося въ частяхъ трубы, расположенныхъ выше линіи дѣйствительныхъ давленій, ставить насосы, а на соединенія трубъ въ этихъ частяхъ водопровода обратить особенное вниманіе, чтобы избѣжать всасыванія воздуха наружнаго во внутрь трубы.

Понятно, что еслибы какая-либо часть водопроводной трубы расположилась выше линіи внутреннихъ давленій, движеніе воды въ такомъ водопроводѣ сдѣлалось бы невозможнымъ, такъ какъ для такой части формулы наши доставили бы для давленія p величину отрицательную, что противорѣчило бы основному понятію о давленіи жидкости.

84. *Простой водопроводъ съ перемѣннымъ діаметромъ.*

Положимъ теперь, что два резервуара, разность уровней которыхъ равна H, сообщаются, при помощи трубы длиною L, съ перемѣннымъ діаметромъ d, измѣняющимся постепенно, при переходѣ отъ одной оконечности трубы къ другой. Сохраняя прежнія обозначенія и допуская, что всѣ сопротивленія движенію ничтожны въ сравненіи съ треніемъ въ трубѣ, получимъ для давленія p въ нѣкоторомъ сѣченіи трубы выраженіе (см. форм. (1) № 81):

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} + z - Q^2 \int_0^l \frac{\partial l}{\gamma d^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

въ которомъ $\frac{Q^2 \partial l}{\gamma d^5}$ представляетъ высоту, затраченную на треніе на элементѣ ∂l длины трубы. Хотя коэффиціентъ γ зависитъ отъ діаметра d трубы, но такъ какъ онъ мѣняется слабо съ измѣненіемъ діаметра, то можно его разсматривать какъ постоянное количество, равное 16^2 на всемъ протяженіи трубы. Допуская это, положимъ, для примѣра, что діаметръ d постепенно и равномѣрно уменьшается, начиная отъ значенія d_0 до значенія d_1, тогда для опредѣленія зависимости d отъ l, будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{d_0 - d}{d_0 - d_1} = \frac{l}{L},$$

изъ котораго получаемъ:

$$d = d_0 - (d_0 - d_1)\frac{l}{L} \quad \text{и} \quad \partial d = -\frac{d_0 - d_1}{L} \cdot \partial l,$$

поэтому имѣемъ:

$$\frac{p}{\Delta}=\frac{P}{\Delta}+z+\frac{Q^2L}{\gamma(d_0-d_1)}\int_{d_0}^{d}\frac{\partial d}{d^5},$$

или $$\frac{p}{\Delta}=\frac{P}{\Delta}+z+\frac{Q^2L}{4\gamma(d_0-d_1)}\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{d_0{}^4}\right)\quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Примѣняя это уравненіе къ послѣднему сѣченію, получаемъ:

$$H=\frac{Q^2L}{4\gamma(d_0-d_1)}\left(\frac{1}{d_1{}^4}-\frac{1}{d_0{}^4}\right)\quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Наконецъ, для ординаты ζ кривой дѣйствительныхъ давленій, находимъ:

$$\zeta=\frac{Q^2L}{4\gamma(d_0-d_1)}\cdot\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{d_0{}^4}\right)\quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

куда, вмѣсто d, должно внести $d_0-(d_0-d_1)\dfrac{l}{L}$ и разсматривать l какъ абсциссу кривой.

Такъ какъ для послѣдняго сѣченія $d=d_1$ и $\zeta=H$, а для перваго $d=d_0$ и $\zeta=0$, то кривая эта, начинаясь на уровнѣ воды верхняго резервуара, идетъ постепенно понижаясь и достигаетъ до уровня нижняго резервуара.

Еслибы такой водопроводъ съ перемѣннымъ діаметромъ мы пожелали замѣнить водопроводомъ съ постояннымъ діаметромъ D той же длины L и дающій такой же расходъ Q, при томъ же напорѣ H, то имѣли бы для сего послѣдняго водопровода:

$$H=\frac{Q^2L}{\gamma D^5},$$

что, сравнивая съ выраженіемъ (b), нашли бы

$$D^5=4\,\frac{d_0-d_1}{\dfrac{1}{d_1{}^4}-\dfrac{1}{d_0{}^4}}=4\,\frac{d_0{}^4d_1{}^4}{d_0{}^3+d_0{}^2d_1+d_0d_1{}^2+d_1{}^3}\quad \ldots \quad \text{(d)}$$

Замѣтимъ, что водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ D, опредѣляемымъ изъ послѣдняго уравненія, имѣя съ даннымъ водопроводомъ одинаковую длину, одинаковый расходъ и одинаковую высоту, затрачиваемую на треніе, отличался бы отъ него линіею дѣйствительныхъ давленій, т.-е. давленія въ соотвѣтствующихъ сѣченіяхъ этихъ двухъ водопроводовъ не были бы одинаковы.

85. Положимъ теперь, что водопроводъ составленъ изъ ряда трубъ съ постоянными, но неравными діаметрами d_1, d_2, $d_3 \ldots$, длиною L_1, L_2, $L_3 \ldots$ Въ этомъ случаѣ, существующій напоръ H долженъ равняться суммѣ напоровъ, затраченныхъ на треніе въ каждой трубѣ, т.-е количеству

$$\frac{Q^2}{\gamma} \sum \frac{L_n}{d_n{}^5}$$

сложенному съ суммою напоровъ затраченныхъ на ударъ, при каждомъ переходѣ воды изъ узкой трубы въ широкую и напоровъ, затраченныхъ на сжатіе, при каждомъ переходѣ изъ широкой трубы въ узкую. Однако, при значительной длинѣ $L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$ всего водопровода, потери на ударъ и на сжатіе будутъ всегда ничтожны въ сравненіи съ потерею на треніе, поэтому и въ настоящемъ случаѣ можно предполагать, что напоръ H теряется только на треніе, т.-е. можно принимать

$$H = \frac{Q^2}{\gamma} \sum \frac{L_n}{d_n{}^5} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Желая для разсматриваемаго водопровода вычертить линію дѣйствительныхъ давленій, нужно имѣть въ виду, что линія эта для каждой отдѣльно трубы будетъ прямою; но такъ какъ при переходѣ отъ одной трубы къ другой происходитъ быстрое измѣненіе діаметра, то на линіи дѣйствительныхъ давленій этотъ переходъ будетъ отражаться быстрымъ измѣненіемъ ея наклоненія къ горизонту; слѣдов., линія дѣйствительныхъ давленій, въ разсматриваемомъ случаѣ, будетъ ломанною.

Желая данный водопроводъ замѣнить водопроводомъ съ постояннымъ діаметромъ D, доставляющимъ тотъ же расходъ и ту же потерю на треніе, нужно длину λ этого водопровода искать по формулѣ:

$$\frac{Q^2 \lambda}{\gamma D^5} = \frac{Q^2}{\gamma} \cdot \sum \frac{L_n}{d_n{}^5}, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{D^5} = \sum \frac{L_n}{d_n{}^5} \quad \ldots \quad (18)$$

Если же длина λ будетъ задана, напр., если будетъ сказано, что $\lambda = \Sigma L_n = L$, тогда формула послужитъ для опредѣленія діаметра D. Положимъ, для примѣра, что водопроводъ состоитъ только изъ двухъ трубъ: одной, длиною $L_1 = 0{,}9L$ и другой, длиною $L_2 = 0{,}1L$, но діаметръ d_2 этой послѣдней составляетъ только $\frac{1}{5}$ часть діаметра первой, то-есть $d_2 = 0{,}2d_1$. Въ этомъ случаѣ послѣдняя формула даетъ:

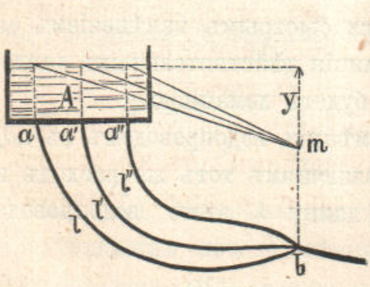
$$\frac{\lambda}{D^5} = \frac{0{,}9L}{d_1^{\,5}} + \frac{0{,}1L}{(0{,}2d_1)^5} = \frac{L}{d_1^{\,5}}\left(0{,}9 + \frac{0{,}1}{0{,}00032}\right) = 313{,}4\,\frac{L}{d_1^{\,5}}.$$

Посмотримъ теперь, какова должна бы быть длина λ водопровода, если діаметръ его D будетъ равенъ діаметру d_2 меньшей трубы. Принимая въ послѣднемъ выраженіи $D = d_2 = 0{,}2d_1$ получаемъ:

$$\lambda = 313{,}4 \times (0{,}2)^5 L = 0{,}100288L = 1{,}00288L_2,$$

т.-е. почти такая же, какъ и длина L_2.

Изъ этого примѣра видно, что если въ водопроводѣ существуетъ часть, хотя бы и не большой длины сравнительно съ полною длиною водопровода, но имѣющая значительно меньшій діаметръ, чѣмъ остальная часть, то потеря напора на треніе зависитъ исключительно отъ этой части съ малымъ діаметромъ. Слѣдов., количество воды, доставляемой водопроводомъ, исключительно зависитъ отъ діаметра его узкой части; такъ что, желая увеличить это количество, нужно увеличивать діаметръ узкой части водопровода. Подобное увеличеніе діаметра, сдѣланное даже на небольшомъ протяженіи, можетъ значительно увеличить расходъ, между тѣмъ какъ увеличеніе діаметра широкой части водопровода, даже на значительной длинѣ, принесетъ въ этомъ отношеніи мало пользы.



Фиг. 57.

86. *Сложный или параллельный водопроводъ.*

Положимъ, что изъ резервуара A или изъ нѣсколькихъ различныхъ резервуаровъ, но имѣющихъ уровни воды на одинаковой высотѣ (фиг. 57), ведется вода нѣсколькими водопроводами, ab, $a'b$, $a''b$,… сходящимися въ точкѣ b (такіе водопроводы называютъ *параллельными*), діаметры которыхъ суть d, d' d'',… а длины l, l', l'',… Пусть еще q, q', q'',… будутъ расходы въ каждомъ изъ нихъ, такъ что полный расходъ $Q = q + q' + q'' + \ldots$

Такъ какъ въ точкѣ b схода будетъ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное давленіе, то каждому изъ этихъ водопроводовъ будетъ соотвѣтствовать одна и та же высота y, затраченная на треніе, а потому будемъ имѣть:

$$y = \frac{q^2 l}{\gamma d^5} = \frac{q'^2 l'}{\gamma d'^5} = \frac{q''^2 l''}{\gamma d''^5} = \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Опредѣляя изъ этихъ выраженій расходы, и внося ихъ въ уравненіе $Q = q + q' + q'' + \ldots$, получимъ:

$$Q = \sqrt{\gamma y}\left[\sqrt{\frac{d^5}{l}} + \sqrt{\frac{d'^5}{l'}} + \cdots\right] = \sqrt{\gamma y} \cdot \Sigma \sqrt{\frac{d^5}{l}} \quad . \quad (b)$$

Но если назовемъ чрезъ δ и λ діаметръ и длину такого водопровода, который способенъ доставить тотъ же объемъ воды Q, при той же потерѣ y на треніе, то будемъ имѣть:

$$Q = \sqrt{\gamma y} \cdot \sqrt{\frac{\delta^5}{\lambda}}$$

а потому

$$\sqrt{\frac{\delta^5}{\lambda}} = \Sigma \sqrt{\frac{d^5}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Въ случаѣ, когда параллельные водопроводы будутъ одинаковой длины, можно будетъ принять λ равнымъ общей длинѣ этихъ водопроводовъ и тогда формула (19) доставитъ:

$$\sqrt{\delta^5} = \sqrt{d^5} + \sqrt{d'^5} + \ldots = \Sigma \sqrt{d^5} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

При помощи послѣдняго уравненія можно убѣдиться, что *замѣненіе одного простого водопровода нѣсколькими парллельными не выгодно въ экономическомъ отношеніи.* Дѣйствительно, опытъ показываетъ, что стоимость трубъ, вмѣстѣ съ укладкою ихъ на мѣсто, возрастаетъ пропорціонально діаметру и длинѣ водопровода, такъ что капиталъ K, затрачиваемый на построеніе водопроводной трубы можно принимать равнымъ $k\lambda\delta$, если λ и δ будутъ обозначать длину и діаметръ этой трубы.

И такъ примемъ $K = k\lambda\delta$.

Если теперь этотъ водопроводъ замѣнимъ n параллельными водопроводами, діаметръ которыхъ d, а длина та же λ, то по формулѣ (20) получимъ:

$$\sqrt{\delta^5} = n\sqrt{d^5}.$$

Стоимость такого параллельнаго водопровода будетъ

$$K' = k \cdot n\lambda d.$$

Сравнивая же между собою K' и K, найдемъ:

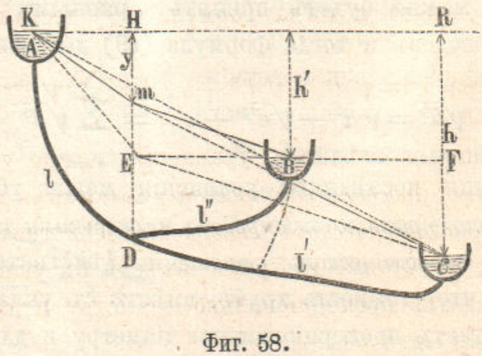
$$\frac{K'}{K} = n\frac{d}{\delta} = n\frac{d}{dn^{\frac{2}{5}}} = n^{1-\frac{2}{5}} = n^{\frac{3}{5}}.$$

Но $n > 1$, поэтому $K' > K$ и притомъ тѣмъ больше, чѣмъ болѣе число n параллельныхъ водопроводовъ.

Такъ какъ формулы (19) и (18) позволяютъ намъ сложный водопроводъ, а также и водопроводъ съ перемѣннымъ діаметромъ, замѣнять простымъ водопроводомъ съ постояннымъ діаметромъ, то мы будемъ исключительно заниматься разсмотрѣніемъ водопроводовъ съ постояннымъ діаметромъ.

87. *Сложный водопроводъ съ различными уровнями воды въ верхнихъ резервуарахъ.*

Пусть A, B и C будутъ три резервуара, сообщающіеся между собою помощью водопроводовъ AD, DC и DB (фиг. 58).



Фиг. 58.

Пусть еще h будетъ разность уровней резервуаровъ A и C, h' разность уровней резервуаровъ A и B; l, l' и l'' длины трубъ AD, DC и DB; q, q', q'' объемы воды, по нимъ протекающіе въ секунду, и d діаметръ трубъ.

Понятно, что верхній резервуаръ A можетъ только *снабжать* водою остальные, нижній резервуаръ C можетъ только получать воду, т.-е. *расходовать* воду остальныхъ двухъ резервуаровъ; что же касается средняго резервуара, то онъ можетъ быть или снабжающимъ, или расходующимъ, смотря по обстоятельствамъ.

Такъ какъ въ узлѣ D, въ которомъ сходятся вѣтви AD и DB, существуетъ нѣкоторое опредѣленное піезометрическое давленіе (дѣйствительное давленіе), то, отложивъ на вертикали DH высоту Dm, измѣряющую это давленіе, получимъ опредѣленную высоту $Hm = y$, теряющуюся на треніе въ части AD. Понятно, что если точка m будетъ лежать выше уровня EF резервуара B, то внутри трубы DB будетъ происходить движеніе воды отъ D къ B, т.-е. въ этомъ случаѣ резервуаръ B будетъ расходующимъ; если же m будетъ лежать ниже уровня EF, резервуаръ B будетъ снабжающимъ и, наконецъ, если точка m будетъ лежать въ точкѣ E, резервуаръ B останется въ бездѣйствіи; вода въ вѣтви DB будетъ въ покоѣ. Такимъ образомъ, состояніе резервуара B находится въ прямой зависимости отъ положенія точки m, т.-е. отъ направленія линіи дѣйствительныхъ давленій для вѣтви AD.

Положимъ, что имѣемъ случай, когда точка m лежитъ выше уровня воды въ резервуарѣ B; тогда, во-первыхъ, будемъ имѣть:

$$q = q' + q'' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(a)}$$

а затѣмъ, для потерь напоровъ на треніе въ частяхъ AD, DB и DC, получимъ:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{для вѣтви } AD\text{:} & y = \dfrac{q^2 l}{\gamma d^5} \\ \quad\text{»} \quad \text{»} \quad DB\text{:} & h' - y = \dfrac{q''^2 l''}{\gamma d^5} \\ \quad\text{»} \quad \text{»} \quad DC\text{:} & h - y = \dfrac{q'^2 l'}{\gamma d^5} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(b)}$$

Опредѣляя изъ этихъ уравненій расходы q, q' и q'' и внося въ выраженіе (a), получимъ:

$$\sqrt{\frac{y}{l}} = \sqrt{\frac{h-y}{l'}} + \sqrt{\frac{h'-y}{l''}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

гдѣ y необходимо должно быть > 0 и $< h'$; т.-е. послѣднее уравненіе должно имѣть корень, лежащій въ предѣлахъ 0 и h'; но при $y = 0$ первая часть этого уравненія обращается въ нуль, а вторая часть—въ нѣкоторую положительную величину, т.-е. первая часть дѣлается меньше второй; поэтому при $y = h'$ необходимо должно случиться обратное, т.-е. первая часть должна сдѣлаться болѣе второй. И такъ имѣемъ слѣдующее условное неравенство

$$\sqrt{\frac{h'}{l}} > \sqrt{\frac{h-h'}{l'}}, \quad \text{или} \quad \frac{h'}{l} > \frac{h-h'}{l'} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

долженствующее имѣть мѣсто для того, чтобы резервуаръ B былъ расходующимъ, а не снабжающимъ.

Если по причинѣ значительной длины вѣтвей, въ сравненіи съ вертикальными разстояніями h и h' уровней, вмѣсто l и l' примемъ ихъ проекціи на горизонтальную прямую HR, т.-е. примемъ $l = \overline{KH}$ и $l' = \overline{EF}$, то условіе (22) требуетъ, чтобы уголъ HKE былъ болѣе угла FEC; или, что одно и то же, чтобы точка E лежала ниже прямой KC, изображающей линію дѣйствительныхъ давленій въ водопроводѣ ADC въ предположеніи, что вѣтви DB не существуетъ.

Если резервуаръ B будетъ, какъ и A, снабжающимъ, то вмѣсто уравненія (a) нужно взять $q + q'' = q'$, а тогда вмѣсто уравненія (21) получимъ слѣдующее:

$$\sqrt{\frac{y}{l}} + \sqrt{\frac{y-h'}{l''}} = \sqrt{\frac{h-y}{l'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

которое имѣетъ корень, лежащій въ предѣлахъ между h' и h. Замѣчая, что при $y = h$ первая часть этого уравненія дѣлается больше второй части, приходимъ къ заключенію, что при $y = h'$

первая часть должна быть меньше второй части; т.-е. имѣемъ условное неравенство

$$\frac{h'}{l} < \frac{h-h'}{l'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

которое требуетъ, чтобы точка E лежала выше прямой KC.

Понятно, что если точка E будетъ лежать на прямой KC, т.-е. если будетъ

$$\frac{h'}{l} = \frac{h-h'}{l'}$$

то резервуаръ B будетъ въ бездѣйствіи. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $q = q'$ и $q'' = 0$.

Такимъ образомъ состояніе резервуара B оказывается зависимымъ отъ отношенія, существующаго между количествами $\frac{h'}{l}$ и $\frac{h-h'}{l'}$, т.-е. зависитъ отъ расположенія узла F и отъ высотъ h и h' и не зависитъ отъ длины вѣтви DB. Если имѣетъ мѣсто неравенство (22), то его можно превратить въ неравенство (24), подвигая узелъ D ближе къ нижнему резервуару C и, обратно, если имѣетъ мѣсто неравенство (24), то его можно превратить въ (22), подвигая узелъ D ближе къ верхнему резервуару A. Въ каждомъ частномъ случаѣ, по значеніямъ h, h', l и l', легко будетъ судить, который изъ случаевъ имѣетъ мѣсто, т.-е. какую роль будетъ играть резервуаръ B, а слѣдов. и которою изъ формулъ (21) и (23) должно воспользоваться для опредѣленія y, отъ значенія котораго зависятъ расходы q, q' и q''.

88. Не останавливаясь здѣсь на рѣшеніи уравненія (21) или (23), которое по освобожденіи отъ радикаловъ приведется къ квадратному уравненію, изъ двухъ корней коего всегда можно выбрать тотъ, который идетъ въ дѣло, такъ какъ предварительно извѣстны предѣлы, внутри которыхъ лежитъ искомый корень, мы обратимся къ разсмотрѣнію одного свойства изучаемаго теперь распредѣленія воды.

Пусть Q обозначаетъ расходъ воды въ томъ случаѣ, когда кранъ, сообщающій резервуаръ B съ вѣтвью DB, закрытъ и вода изъ резервуара A прямо поступаетъ въ резервуаръ C. Этотъ объемъ Q будетъ опредѣляться формулою:

$$Q^2 = \frac{\gamma d^5}{l + l'} \quad \text{или} \quad Q^2(l + l') = \gamma d^6 h.$$

Положимъ теперь, что узелъ D на водопроводѣ AC расположенъ такъ, что резервуаръ B долженъ быть расходующимъ и что открываютъ кранъ этого резервуара такъ, чтобы нѣкоторое количество q'', небольшое сравнительно съ Q, поступило въ него вѣтвью DB. Когда начнетъ дѣйствовать резервуаръ B, расходъ Q превратится въ $q = q' + q''$, гдѣ q' будетъ обозначать то количество воды, которое теперь будетъ поступать въ резервуаръ C вмѣсто прежняго Q.

Сравнимъ количества q' и Q. Для разсматриваемаго случая имѣемъ уравненія (b) № 87, изъ которыхъ, чрезъ сложеніе перваго съ третьимъ, выводимъ:

$$\gamma d^5 h = q^2 l + q'^2 l' = q'^2 l' + (q' + q'')^2 l$$

или $$Q^2(l - l') = q'^2(l + l') + (2q'q'' + q''^2)l,$$

откуда $$1 = \left(\frac{q'}{Q}\right)^2 + \left(2\,\frac{q'}{Q} \cdot \frac{q''}{Q} + \left(\frac{q''}{Q}\right)^2\right)\frac{l}{l + l'}$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\frac{q'}{Q}$, находимъ:

$$\frac{q'}{Q} = -\frac{q''}{Q} \cdot \frac{l}{l + l'} + \sqrt{1 - \left(\frac{q''}{Q}\right)^2 \frac{ll'}{(l + l')^2}}.$$

Но гдѣ бы ни былъ расположенъ узелъ D, т.-е. каково бы ни было l въ сравненіи съ полною длиною $l + l' = L$ водопровода AC, количество

$$\frac{ll'}{(l + l')^2} = \frac{l(L - l)}{L^2}$$

будетъ не менѣе нуля и не болѣе $\frac{1}{4}$, такъ какъ наибольшее его значеніе имѣетъ мѣсто при $l = \frac{1}{2}L$; поэтому предполагая, что $\frac{q''}{Q}$ есть небольшая дробь, можно въ послѣдней формулѣ принять радикалъ за единицу, безъ чувствительной погрѣшности, и тогда получимъ:

$$q' = Q - q'' \frac{l}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

и

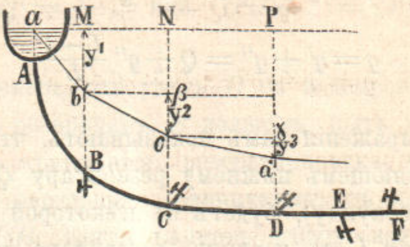
$$q = q' + q'' = Q + q'' \frac{L-l}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Послѣднія выраженія намъ показываютъ, что если въ водопроводѣ, доставляющемъ нижнему резервуару Q единицъ объемовъ воды (въ секунду), будетъ въ нѣкоторой точкѣ D, лежащей на разстояніи l отъ верхняго резервуара, взято количество воды q'' (небольшое сравнительно съ Q), то притокъ въ нижній резервуаръ воды уменьшится, но не на полное количество q'', а на часть его, тѣмъ бо́льшую, чѣмъ болѣе l въ сравненіи съ полною длиною L водопровода; расходъ же изъ верхняго резервуара увеличится на количество, составляющее часть количества q'' тѣмъ бо́льшею, чѣмъ болѣе $L-l$ въ сравненіи съ L.

89. *Водопроводъ, расходующій воду и на оконечности, и на пути.*

При разсматриваніи обстоятельствъ распредѣленія воды въ сложномъ водопроводѣ съ неодинаковыми уровнями воды въ резервуарахъ, мы видѣли, что сверхъ расходованія на оконечности трубы нижнимъ резервуаромъ, можетъ существовать еще и расходованіе на пути вѣтвью, выходящею изъ нѣкоторой точки, взятой между оконечностями водопроводной трубы. Въ дѣйствительности случай такого расходованія на пути постоянно имѣетъ мѣсто въ городскихъ водопроводахъ. Возможность доставлять воду, въ одно и то же время, въ большое число точекъ данной мѣстности, достигается устройствомъ водопроводной трубы, называемой *магистралью*, имѣющею боковыя вѣтви, выходящія изъ различныхъ ея точекъ. Расходованіе воды этими боковыми вѣтвями и называется *расходованіемъ на пути* магистрали. Боковыя вѣтви въ свою очередь могутъ имѣть также расходованіе на пути, т.-е. могутъ быть магистралями для второго ряда боковыхъ вѣтвей и т. д.

Чтобы отдать себѣ отчетъ въ явленіяхъ расходованія воды на пути, положимъ, что изъ верхняго резервуара идетъ магистраль $ABCDE...$ (фиг. 59), имѣющая въ точкахъ B, C, D... боковыя вѣтви съ расходами q_1, q_2, q_3... Пусть l_1 и d_1 будутъ



Фиг. 59.

длина и діаметръ части AB, l_2 и d_2 тоже для части BC и т. д. и наконецъ пусть y_1, y_2, y_3... будутъ потери напора на треніе въ частяхъ AB, BC, CD и проч.

Такъ какъ часть AB магистрали должна нести объемъ воды равный суммѣ $q_1 + q_2 + q_3 + ...$, то напоръ y_1, изображающійся на фигурѣ длиною Mb, будетъ равенъ:

$$\overline{Mb} = y_1 = \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + \dots)^2 l_1}{\gamma d_1^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Объемъ, доставляемый частью BC, равенъ

$$q_2 + q_3 + \cdots$$

поэтому потеря напора на треніе на длинѣ $AB + BC$, равная $y_1 + y_2 = \overline{Nc}$, найдется изъ выраженія:

$$\overline{Nc} = y_1 + y_2 = y_1 + \frac{(q_2 + q_2 + \dots)^2 l_2}{\gamma d_2^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Подобнымъ образомъ для потери напора на длинѣ $AB + BC + CD$ найдемъ:

$$\overline{Pd} = y_1 + y_2 + y_3 = y_1 + y_2 + \frac{(q_3 + \dots)^2 l_3}{\gamma d_3^5} \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

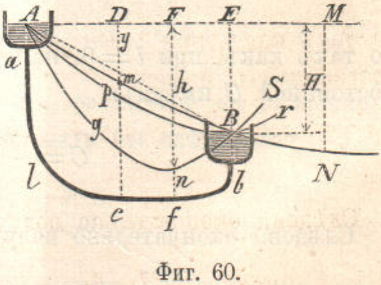
и т. д. для всѣхъ остальныхъ частей магистрали.

Понятно, что линія дѣйствительныхъ давленій будетъ ломанная $abcd$... Если магистраль на всемъ протяженіи будетъ имѣть одинаковый діаметръ, то изъ выраженій (a), (b), (c) не трудно усмотрѣть, что въ такомъ случаѣ углы наклоненія сторонъ ab, bc, cd многоугольника $abcd$, къ горизонту будутъ постепенно уменьшаться. Еслибы діаметры d_1, d_2, d_3... не были извѣстны, то ихъ можно было бы опредѣлить по заданнымъ значеніямъ напоровъ y_1, y_2, y_3...; т.-е. въ этомъ случаѣ можно было бы задать форму линіи дѣйствительныхъ давленій и, сообразно этой формѣ, найти діаметры частей AB, BC, CD и т. д.

При достаточно малыхъ разстояніяхъ между точками A, B, C, D.... сравнительно съ полною длиною водопровода, ломанную линію дѣйствительныхъ давленій можно замѣнить кривою, т.-е. можно существующее расходованіе на пути разсматривать какъ бы совершающимся непрерывно чрезъ узкую щель, сдѣланную во всю длину магистрали. Хотя такого непрерывнаго расходованія на пути въ дѣйствительности никогда не бываетъ, но такъ какъ случай такого расходованія подчиняется математическому анализу и съ бо̀льшею степенью точности можетъ замѣнить случаи, дѣйствительно существующіе въ практикѣ, то ознакомленіе съ нимъ намъ будетъ весьма полезно при проектированіи водопроводной сѣти.

90. *Непрерывное расходованіе на пути.*

Пусть на фигурѣ 60 H обозначаетъ разность уровней двухъ резервуаровъ A и B, соединенныхъ между собою трубою ab, имѣющею непрерывное расходованіе на пути, и притомъ такое, что на каждой единицѣ длины этой трубы расходуется въ единицу времени объемъ воды q. Слѣдов., если L будетъ полная длина трубы ab и Q полный расходъ на пути, то будемъ имѣть



Фиг. 60.

$$Q = qL, \text{ или } q = \frac{Q}{L}.$$

Положимъ, что сверхъ расхода Q на пути, существуетъ еще и расходъ P на оконечности b.

Возьмемъ сѣченіе c трубы, на разстояніи l отъ начала a, и назовемъ буквою y высоту, затраченную на треніе на протяженіи l; тогда высота, затраченная на длинѣ $l + \partial l$, будетъ равна $y + \partial y$. Но чрезъ сѣченіе c трубы долженъ протекать объемъ воды P, расходуемый на оконечности, и тотъ объемъ, который расходуется непрерывнымъ образомъ на части cb трубы, равной $L - l$; поэтому, полный объемъ, протекающій въ каждую секунду чрезъ сѣченіе c, равенъ

$$P + Q\frac{L-l}{L};$$

а потому для высоты ∂y получаемъ:

$$\partial y = \frac{\left(P + Q\frac{L-l}{L}\right)^2 \cdot \partial l}{\gamma d^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Принимая на время $P + Q\frac{L-l}{L} = z$, а слѣдов. $\partial l = -\frac{L}{Q}\partial z$, получимъ:

$$\partial y = -\frac{Lz^2 . \partial z}{\gamma Q d^5}.$$

Интегрируя это послѣднее уравненіе въ предположеніи, что діаметръ d трубы постояненъ и внося затѣмъ, вмѣсто z, его значеніе, найдемъ:

$$y = C - \frac{L}{3\gamma Q d^5}\left(P + Q\frac{L-l}{L}\right)^3;$$

но такъ какъ, при $l = 0$, напоръ y тоже равенъ нулю, то для постоянной C имѣемъ:

$$C = \frac{(P+Q)^3 . L}{3\gamma Q d^5}.$$

Слѣдов., окончательно получаемъ:

$$y = \frac{L}{3\gamma Q d^5}\left[(P+Q)^3 - \left(P + Q\frac{L-l}{L}\right)^3\right] \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Если, какъ и въ предъидущихъ случаяхъ, будемъ длину l считать равною проекціи ея на горизонтальную линію, лежащую въ вертикальной плоскости, проведенной чрезъ оконечности водопроводной трубы ab, то послѣднее уравненіе будетъ уравненіемъ кривой дѣйствительныхъ давленій, въ которомъ $y = \overline{Dm}$ будетъ ординатою нѣкоторой точки m кривой, $l = \overline{AD}$ — абсциссою той же точки. Кривая эта есть кубическая парабола. Вершина N этой параболы лежитъ далѣе точки B, а именно, координаты ея найдутся изъ условія, что для нея

$$\frac{dy}{dl} = 0, \quad \text{или} \quad P + Q\frac{L-l}{L} = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\overline{AM} = L + \frac{P}{Q}\,L \ \text{и}\ \overline{MN} = \frac{(P+Q)^3 L}{3\gamma Q d^5}.$$

Если отверстіе на оконечности b будетъ вполнѣ открыто, тогда напоръ H будетъ теряться только на треніе въ трубѣ ab, а потому въ такомъ случаѣ въ уравненіи (28), при $l = L$, нужно принять $y = H$, и тогда получимъ:

$$H = \frac{L}{3\gamma Q d^5}\Big[(P+Q)^3 - P^3\Big] = \frac{P^2 L}{\gamma d^5} + \frac{Q^2 L}{3\gamma d^5} + \frac{(\sqrt{PQ})^2 L}{\gamma d^5}\,. \quad (29)$$

Въ случаѣ, еслибы существовалъ расходъ на пути безъ расхода на оконечности, формулы (28) и (29) имѣли бы видъ:

$$y = \frac{Q^2 L}{3\gamma d^5}\left[1 - \left(\frac{L-l}{L}\right)^3\right] \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

$$H = \frac{Q^2 L}{3\gamma d^5}; \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

между тѣмъ какъ, при существованіи расхода P на оконечности, безъ расхода на пути, формулы были бы слѣдующія:

$$y = \frac{P^2 l}{\gamma d^5} \quad \text{и} \quad H = \frac{P^2 L}{\gamma d^5}.$$

Изъ сравненія этихъ формулъ между собою видно, что при существованіи расхода Q на пути, теряющаяся высота на треніе выходитъ въ три раза менѣе той, какая теряется, когда такой же объемъ Q расходуется на оконечности водопровода. Слѣдов., діаметръ водопровода, расходующаго воду только на своей оконечности, долженъ быть въ $\sqrt[5]{3}$, или въ 1,25 разъ болѣе діаметра такого водопровода, который расходуетъ, при той же длинѣ и томъ же напорѣ, одинаковое съ нимъ количество воды на пути. Разница въ діаметрахъ этихъ водопроводовъ выходитъ не особенно большая, несмотря на существенную разницу въ обстоятельствахъ расходованія. Это замѣчаніе можетъ быть весьма полезнымъ при составленіи предварительныхъ соображеній касательно проектируемаго водопровода, такъ какъ оно позволяетъ расходъ на пути отнести къ оконечности, съ погрѣшностью не особенно бо́льшею, и притомъ приводящею къ бо́льшему діаметру, т.-е. съ погрѣшностью, обезпечивающею полученіе отъ водопровода требуемаго дѣйствія.

Формула (29) показываетъ, что при существованіи расхода на пути и на оконечности, теряющійся напоръ на треніе состоитъ изъ трехъ напоровъ: изъ того, какой теряется вслѣдствіе существованія расхода P на оконечности, изъ того, какой теряется вслѣдствіе существованія расхода Q на пути и изъ того, какой терялся бы, еслибы на оконечности существовалъ расходъ $\sqrt{PQ}$, равный среднему геометричсскому изъ расходовъ P и Q.

Изъ формулы (29) можемъ безъ затрудненія найти діаметръ d водопровода, имѣющаго расходъ P по оконечности и расходъ Q на пути, когда длина L и напоръ H будутъ извѣстны. Водопроводъ такого діаметра, еслибы не имѣлъ расхода на пути (еслибы существующія на пути отверстія были закрыты), доставлялъ бы нижнему резервуару въ каждую секунду объемъ воды, равный R, опредѣляемый изъ выраженія:

$$H=\frac{R^2L}{\gamma d^5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Сравнивая это уравненіе съ (29), получаемъ:

$$R^2=P^2+PQ+\frac{Q}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

что можно представить въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$R^2 = (P + 0,5Q)^2 + \left(\frac{Q}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

и

$$R^2 = \left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} PQ;$$

откуда видно, что

$$P + 0,57735Q > R > P + 0,5Q.$$

Слѣдоват., съ самою незначительною погрѣшностью всегда можно принять

$$R = P + 0,57Q \text{ *)} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

и искать діаметръ d, по даннымъ P, Q, L и H, изъ формулы:

$$H = \frac{(P + 0,57Q)^2 . L}{\gamma d^5} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Слѣдоват., при существованіи расхода Q на пути, можно, безъ чувствительной погрѣшности, къ расходу P на оконечности прибавить $0,57Q$, и затѣмъ разсматривать только расходъ $P + 0,57Q$ какъ бы существующимъ на оконечности безъ расхода на пути.

91. *Водопроводъ, питающійся двумя резервуарами.*

Въ предъидущемъ № мы видѣли, что при существованіи расходовъ P и Q, на оконечности и на пути водопровода, зависимость между этими расходами и тѣмъ расходомъ R, какой существовалъ бы въ этомъ водопроводѣ, на оконечности его, еслибы расходованіе на пути было прекращено, есть слѣдующая:

$$R^2 = P^2 + PQ + \frac{Q^2}{2}.$$

Рѣшая это уравненіе относительно P, получаемъ:

$$P = -\frac{1}{2}Q + \sqrt{R^2 - \frac{Q^2}{12}} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

---

*) Дюпюи принимаетъ $R = P + 0,55Q$. См. его Traité de la conduite et de la distribution de eaux.

Изъ этого послѣдняго выраженія усматриваемъ, что пока $Q < R\sqrt{3}$ (гдѣ R опредѣляется изъ уравненія (32)), расходъ P на оконечности существуетъ и величина его опредѣляется уравненіемъ (36). Если $Q = R\sqrt{3}$, то P обращается въ нуль, т. е. въ этомъ случаѣ существуетъ только расходъ на пути, нижній же резервуаръ не получаетъ воды. Наконецъ, если $Q > R\sqrt{3}$, расходъ P дѣлается величиною отрицательною, а это показываетъ, что въ этомъ случаѣ нижній резервуаръ превращается въ снабжающій, такъ что часть l_1 полной длины водопровода, въ этомъ случаѣ, питается верхнимъ резервуаромъ, а остальная часть $l_2 = L - l_1$ получаетъ воду изъ нижняго.

На фигурѣ 60 представлены линіи дѣйствительныхъ давленій, соотвѣтствующія различнымъ частнымъ случаямъ, какіе могутъ имѣть мѣсто. Если расходованіе на пути будетъ прекращено, тогда $Q = 0$, $P = R$ и линія дѣйствительныхъ давленій будетъ прямая AB; если $Q < R\sqrt{3}$, тогда $P > 0$ и линія дѣйствительныхъ давленій будетъ кубическая парабола $AmBN$, вершина N которой будетъ лежать ниже и далѣе точки B; если $Q = R\sqrt{3}$, тогда $P = 0$ и линія дѣйствительныхъ давленій будетъ $ApBr$, вершина которой будетъ лежать въ точкѣ B; наконецъ, если $Q > R\sqrt{3}$, тогда $P < 0$ и линія дѣйствительныхъ давленій будетъ $AgnBS$, вершина которой будетъ лежать въ точкѣ n. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, сѣченіе f водопровода, соотвѣтствующее точкѣ n, будетъ *точкою раздѣла* водопровода. Часть $\overline{af} = l_1$ будетъ питаться верхнимъ резервуаромъ, а часть $\overline{fb} = l_2$ — нижнимъ. Для опредѣленія положенія этой точки раздѣла, назовемъ буквою h высоту $\overline{Fn}$, потерянную на треніе на пути l_1 трубы; тогда по формулѣ (31) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{(ql_1)^2 l_1}{3\gamma d^5} = \frac{q^2}{3\gamma d^5} \cdot l_1^3 \\ h - H &= \frac{(ql_2)^2 l_2}{3\gamma d^5} = \frac{q^2}{3\gamma d^5} \cdot l_2^3. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

гдѣ
$$l_1 + l_2 = L.$$

Изъ этихъ уравненій, по исключеніи h, получаемъ:

$$H = \frac{q^2}{3\gamma d^5}(l_1^3 - l_1^3) = \frac{q^2}{3\gamma d^5}(2l_1^3 - 3Ll_1^2 + 3L^2 l_1 - L^3) \ldots$$

откуда ясно видно, что $l_1 > l_2$, т.-е., что часть водопровода, питающаяся верхнимъ резервуаромъ, всегда болѣе части, питающейся нижнимъ. Слѣдоват., $l_1 < L$ и $> \frac{1}{2}L$, поэтому послѣднее уравненіе всегда можно разрѣшить попытками, или же, можно поступать, при рѣшеніи его, слѣдующимъ образомъ: принимаемъ

$$l_1 = \tfrac{1}{2}L + xL \quad \text{и} \quad l_2 = \tfrac{1}{2}L - xL,$$

тогда получимъ уравненіе:

$$l_1^3 - l_2^3 = \tfrac{3}{2}L^3 \,.\, x(1 + \tfrac{4}{3}x^2) = \frac{3\gamma H d^5}{q^2},$$

откуда находимъ:

$$x = \frac{2\gamma H d^5}{q^2 L^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{3}x^2}$$

а слѣдов., $$x < \frac{2\gamma H d^5}{q^2 L^3} \quad \text{и} \quad x > \tfrac{3}{2}\frac{\gamma H d^5}{q^2 L^3}$$

т.-е. $$l_1 < \tfrac{1}{2}L + 2\frac{\gamma H d^5}{q^2 L^3} \quad \text{и} \quad l_1 > \tfrac{1}{2}L + 1{,}5\frac{\gamma H d^5}{q^2 L^3}.$$

Поступая такимъ образомъ, можно постепенно съуживать предѣлы, внутри которыхъ лежитъ искомое значеніе длины l_1.

Въ случаѣ, когда напоръ h будетъ извѣстенъ, уравненія (a), доставятъ:

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt[3]{\frac{h}{h+H}}$$

что вмѣстѣ съ $l_1 + l_2 = L$, позволяетъ опредѣлить l_1 и l_2 безъ всякихъ затрудненій. Наконецъ, изъ тѣхъ же уравненій (a) получаемъ:

$$L = l_1 + l_2 = \sqrt[3]{\frac{3\gamma d^5}{q^2}} \cdot \left[\sqrt[3]{h} + \sqrt[3]{h-H}\right]$$

откуда для діаметра d имѣемъ:

$$d^5 = \frac{q^2}{3\gamma}\frac{L^3}{(\sqrt[3]{h} + \sqrt[3]{h-H})^3} = \frac{Q^2}{3\gamma}\frac{L}{(\sqrt[3]{h} + \sqrt[3]{h-H})^3} \quad . \quad . \quad (37)$$

92. *Численный примѣръ на случай водопровода, питающагося двумя резервуарами.*

Устройствомъ водопровода, питающагося двумя резервуарами, можно значительно сберечь капиталъ на построеніе водопровода, въ тѣхъ случаяхъ, когда снабженіе данной мѣстности водою должно совершаться прерывнымъ образомъ. Въ такомъ случаѣ всегда можно распорядиться такъ, чтобы въ моменты времени наибольшаго расходованія на пути водопровода оба резервуара были снабжающими, а когда расходованіе на пути сдѣлается наименьшимъ, чтобы нижній резервуаръ изъ снабжающаго превращался бы въ расходующій и накоплялъ бы воду. Имѣя такой нижній резервуаръ, достаточной вмѣстимости, способный изъ расходующаго превращаться въ снабжающій, можно удовлетворить условіямъ прерывнаго водоснабженія съ меньшимъ діаметромъ водопроводной трубы, а слѣдов., и съ меньшею затратою капитала, нежели въ томъ случаѣ, когда будемъ имѣть только одинъ верхній снабжающій резервуаръ.

Слѣдующій примѣръ съ достаточною ясностью обнаружитъ намъ значеніе, въ этомъ отношеніи, второго резервуара.

Положимъ, что требуется устроить водопроводъ длиною 4200 метровъ, допускающій, по мѣстному расположенію расходующихъ отверстій, напоръ въ 9 метровъ для оконечности водопровода и въ 15 метровъ для его средины.

Водопроводъ этотъ долженъ на своемъ пути, во 1-хъ: снабдить водою фонтаны, расходующіе ежесуточно по 2000 кубич. метровъ воды, но дѣйствующихъ только въ теченіи 8 часовъ въ сутки; во-2-хъ, доставитъ ежесуточно 3000 кубическихъ метровъ для орошенія улицъ, при условіи, что орошеніе это совершается въ теченіи трехъ часовъ (напр., съ 11 до 2 часовъ) и, въ-3-ихъ, доставить 3000 куб. метровъ ежесуточно для различныхъ другихъ надобностей частныхъ лицъ, при условіи, что это расходованіе совершается въ теченіи 12 часовъ (напр., съ 8 часовъ утра до 8 часовъ вечера).

Если будемъ устраивать только одинъ верхній резервуаръ, то діаметръ трубы должно будетъ избрать такой, какой необходимъ въ моментъ наибольшаго расходованія. Наибольшее же расходованіе будетъ имѣть мѣсто, когда одновременно будутъ дѣйствовать всѣ три причины.

Первая изъ этихъ причинъ требуетъ въ часъ

$$\frac{2000}{8} = 250 \text{ куб. метр.}$$

вторая требуетъ въ часъ

$$\frac{3000}{3} = 1{,}000 \text{ куб. метр.}$$

и третья—въ часъ

$$\frac{3000}{12} = 250 \text{ куб. метр.}$$

слѣд., наибольшій расходъ въ часъ составляетъ 1500 куб. метровъ или 0,4167 куб. метр. въ 1″.

Поэтому, для діаметра D водопровода съ однимъ верхнимъ резервуаромъ, по формулѣ (31) № 90, получаемъ:

$$D = \sqrt[5]{\frac{(0{,}4167)^2 \times 4220}{3 \times 16^2 \times 9}} = 0{,}63776 \quad \text{или} \quad D = 0{,}64 \text{ метра.}$$

Но если устроимъ два резервуара, по одному на каждой оконечности, то, допуская напоръ нижняго резевуара надъ самымъ возвышеннымъ отверстіемъ, напримѣръ, въ 3,5 метровъ, получимъ для разности H уровней обоихъ резервуаровъ:

$$H = 9 - 3{,}5 = 5{,}5 \text{ метровъ.}$$

Слѣд., по формулѣ (37) № 91, получимъ:

$$D = \sqrt[5]{\frac{(0.4167)^2 \times 4200}{3 \times 16^2 (\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{15 - 5{,}5})^3}} = 0{,}39697 \quad \text{или} \quad D = 0{,}40 \text{ метр.}$$

Такъ какъ стоимость водопровода пропорціональна діаметру трубы, то, при діаметрѣ въ 0,40 метр., водопроводъ обойдется на 37,5 процентовъ дешевле, нежели при діаметрѣ въ 0,64 метр., что, при значительной длинѣ водопроводной трубы, можетъ составить сумму, значительно бо́льшую той, какую должно затратить на построеніе второго нижняго резервуара. Но необходимо провѣрить, было ли удачно избрано положеніе уровня второго резервуара, т.-е. будетъ ли онъ въ теченіи сутокъ получать столько воды, сколько ему придется расходовать.

Очевидно, что водоснабженіе будетъ состоять изъ слѣдующихъ четырехъ періодовъ:

1-й періодъ. Всѣ три причины расходованія въ дѣйствіи. Періодъ этотъ можетъ продолжаться только три часа: требуя по 1500 куб. метр. въ часъ, или по 0,4167 куб. метр. въ 1″. Слѣдоват., для этого періода имѣемъ $Q = 0{,}4167$.

Чтобы опредѣлить роль нижняго резервуара въ теченіе этого періода, ищемъ расходъ R. По извѣстной формулѣ получаемъ:

$$R = \sqrt{\frac{\gamma d^5 H}{L}} = \sqrt{\frac{16^2 \times (0{,}40)^5 \times 5{,}5}{4200}} = 0{,}05859 \text{ куб. метр.}$$

и

$$R\sqrt{3} = 0{,}101482.$$

Такъ какъ $Q > R\sqrt{3}$, то заключаемъ, что въ теченіи перваго періода нижній резервуаръ будетъ снабжающимъ. Для опредѣленія же, сколько онъ израсходуетъ воды, ищемъ положеніе точки раздѣла на водопроводѣ по формулѣ

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt[3]{\frac{h}{h-H}} = \sqrt[3]{\frac{15}{15-5{,}5}} = 1{,}1645$$

а такъ какъ $l_1 + l_2 = 4200$, то $l_2 = 1940{,}24$ метр.

Расходъ на единицѣ длины равенъ $\frac{0{,}4167}{4200}$; поэтому, искомый расходъ нижнимъ резервуаромъ въ продолженіи трехъ часовъ будетъ:

$$\frac{0{,}4167}{4200} \times 1940{,}24 \times 3600 \times 3 = 2078{,}83 \text{ куб. метр.}$$

2-й періодъ. Дѣйствуютъ первая и третья причины вмѣстѣ, въ теченіи 5 часовъ. Расходъ въ часъ равенъ 500 куб. метр. или 0,1389 въ 1″, что опять менѣе $R\sqrt{3}$; слѣдов., и въ продолженіи второго періода нижній резервуаръ будетъ снабжающимъ, причемъ для расхода его въ продолженіи пяти часовъ получимъ:

$$500 \times 3 \times \frac{1940{,}24}{4200} = 1{,}155 \text{ куб. метр.}$$

3-й періодъ. Одна третья причина въ дѣйствіи въ теченіи 4 часовъ. Расходъ въ часъ равенъ въ 250 куб. метровъ или 0,06945 куб. метр. въ $1''$, такъ какъ этотъ расходъ $< R\sqrt{3}$, то въ теченіи этого періода нижній резервуаръ будетъ получать изъ верхняго въ каждую секунду нѣкоторый объемъ воды P, опредѣляемый по формулѣ:

$$P = -\frac{Q}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{Q^2}{12}} = -\frac{0,06945}{2} + \sqrt{(0,05859)^2 - \frac{(0,06945)^2}{12}}$$

т.-е.

$$P = 0,020278.$$

По приближенной же формулѣ Дюпюи, получили бы

$$P = R - 0,55Q = 0,020393.$$

Слѣдов., нижній резервуаръ въ теченіи 4 часовъ получитъ объемъ

$$0,020278 \times 3600 \times 4 = 219 \text{ куб. метр.}$$

4-й періодъ. Расходованія на пути не существуетъ. Все дѣйствіе водопровода въ теченіи остальныхъ 12 часовъ будетъ заключаться въ питаніи нижняго резервуара, причемъ онъ получитъ объемъ

$$0,05859 \times 3600 \times 12 = 2531,09 \text{ куб. метр.}$$

Такимъ образомъ, въ теченіи сутокъ, нижній резервуаръ доставитъ воды

$$2078,83 + 1155 = 3233,83 \text{ куб. метр.},$$

а самъ получитъ изъ верхняго

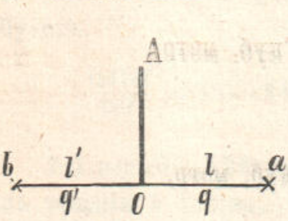
$$219 + 2531,09 = 2750,09 \text{ куб. метр.}$$

Такъ какъ оказавшаяся прибыль недостаточна для вознагражденія убыли воды въ нижнемъ резервуарѣ, то избранное положеніе для уровня воды въ немъ не можетъ быть допущено. Перевѣсъ расхода надъ приходомъ показываетъ, что нужно уменьшить l_2, т.-е. понизить нижній резервуаръ. Принимая, напр., H равнымъ не 5,5, а 6,5 метровъ, мы чрезъ это уменьшимъ $h-H$, а слѣдоват. и l_2. Такимъ образомъ не трудно, послѣ нѣсколькихъ попытокъ, найти надлежащее значенiе для H, опредѣляющее положенiе нижняго резервуара.

93. *Условiя наименьшей затраты капитала на построенiе водопроводной сѣти.*

Составленiе проекта сѣти, долженствующей служить для водоснабженiя данной мѣстности, представляетъ не малыя затрудненiя, главнымъ образомъ потому, что задача о начертанiи самой сѣти и объ опредѣленiи дiаметровъ ея частей не есть задача вполнѣ опредѣленная, когда намъ даны только расходы въ данныхъ точкахъ мѣстности и горизонтальныя и вертикальныя разстоянiя между этими точками. Оказывается, что этихъ данныхъ недостаточно, для опредѣленiя всѣхъ неизвѣстныхъ вопроса, поэтому многiя изъ нихъ нужно будетъ искать на основанiи соображенiй, не вытекающихъ изъ предъидущихъ формулъ. Понятно, что одно изъ главнѣйшихъ соображенiй, какое при этомъ нужно будетъ имѣть въ виду, есть то, чтобы капиталъ, затраченный на построенiе водоснабженiя, былъ возможно меньшiй. Поэтому, ниже помѣщаемыя задачи могутъ быть весьма полезны при составленiи проекта сѣти.

Расположенiе главной магистрали и ея вѣтвей, а слѣдов. и расположенiе узловъ сѣти, до извѣстной степени предоставляется выбору проектирующаго сѣть. Удачнымъ выборомъ направленiя каждой главной вѣтви, по отношенiю къ ея побочнымъ, можно значительно уменьшить стоимость сѣти.



Фиг. 61.

Положимъ, что магистраль AO (фиг. 61) пересѣкаетъ вѣтвь aOb въ точкѣ O и даетъ въ 1'' вѣтви Oa объемъ воды q, а вѣтви Ob—объемъ q', при условiи, что глубины погруженiя пiезометрическихъ уровней въ точкахъ O, a и b послѣдовательно суть h, H и H'. *Требуется на вѣтви ab избрать для узла O такое положенiе, чтобы стоимость этой вѣтви была наименьшая.*

Для діаметровъ частей Oa и Ob имѣемъ:

$$d=\sqrt[5]{\frac{q^2 l}{\gamma(H-h)}} \quad \text{и} \quad d'=\sqrt[5]{\frac{q'^2 l'}{\gamma(H'-h)}},$$

а такъ какъ стоимость пропорціональна количеству $ld+l'd'$, въ которомъ l и l' связаны уравненіемъ $l+l'=L$, гдѣ L есть постоянная величина, то вопросъ приводится къ опредѣленію наименьшаго значенія количества:

$$l\sqrt[5]{\frac{q^2 l}{\gamma(H-h)}}+(L-l)\sqrt[5]{\frac{q'^2(L-l)}{\gamma(H'-h)}}.$$

Приравнивая нулю производную по l этого количества, получимъ уравненіе:

$$\tfrac{6}{5}\left(\frac{q^2}{H-h}\right)^{\frac{1}{5}} l^{\frac{6}{5}-1}-\tfrac{6}{5}\left(\frac{q'^2}{H'-h}\right)^{\frac{1}{5}}(L-l)^{\frac{6}{5}-1}=0,$$

откуда находимъ:

$$\frac{l}{L-l}=\frac{l}{l'}=\left(\frac{q'}{q}\right)^2\cdot\frac{H-h}{H'-h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Если $q>q'$, а $H=H'$, то тогда $l<l'$, т.-е. узелъ долженъ лежать ближе къ отверстію съ большемъ расходомъ; если же $H>H'$ и $q=q'$, то $l>l'$, т.-е. узелъ долженъ лежать ближе къ болѣе возвышенному отверстію. Слѣдов., вообще *узелъ долженъ лежать ближе къ тому отверстію, питаніе котораго труднѣе или потому, что отверстіе это требуетъ болѣе воды, или же потому, что оно расположено выше*.

Полезно еще замѣтить, что на правильное расположеніе узловъ, а слѣдоват. и главныхъ вѣтвей сѣти, расходы вліяютъ сильнѣе, чѣмъ возвышенія отверстій, такъ какъ въ формулѣ (38) расходы входятъ въ квадратѣ, между тѣмъ какъ H и H' — въ первой степени.

Вторая задача наша будетъ состоять въ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго, въ экономическомъ отношеніи, діаметра трубы, имѣющей расходъ Q на пути и расходъ P на оконечности.

Понятно, что по мѣрѣ того, какъ уменьшается количество воды, движущейся въ трубѣ, вслѣдствіе существующаго расхода на пути, можно уменьшать въ нѣкоторой пропорціи и діаметръ; поэтому и рождается вопросъ, по какому закону должно уменьшать діаметръ, чтобы капиталъ на построеніе трубы вышелъ бы наименьшимъ?

Сохраняя обозначенія, какія были введены въ № 90, и интегрируя уравненіе (27) этого № въ предѣлахъ отъ $l=0$ до $l=L$, получимъ слѣдующее уравненіе, которому необходимо долженъ удовлетворять діаметръ d трубы:

$$\gamma H = \int_0^L \frac{\left(P+Q\frac{L-l}{L}\right)^2}{d^5} \, . \, dl \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Стоимость же K трубы изобразится слѣдующимъ интеграломъ:

$$K = \xi \int_0^L d \, . \, dl \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Задача наша, слѣдовательно, состоитъ въ томъ, чтобы найти для d такую зависимость отъ l, при которой интегралъ $\int_0^L d dl$ сдѣлался бы наименьшимъ, и которая въ то же время удовлетворяла бы условному уравненію (a).

Рѣшеніе такой задачи требуетъ примѣненія правилъ варіаціоннаго исчисленія. По правиламъ же этого исчисленія, нужно къ интегралу, обращаемому въ наименьшую величину, прибавить интегралъ второй части условнаго равенства (a); умноживъ его предварительно на постоянный, но произвольный множитель λ, т.-е. нужно взять интегралъ

$$\int_0^L \left[d + \lambda \frac{\left(P+Q\frac{L-l}{L}\right)^2}{d^5} \right] dl \quad . \; . \; . \; . \quad (c)$$

и, прировнявъ нулю его варіацію, въ концѣ вычисленія, воспользоваться неопредѣленностью множителя λ и подобрать для него такое значеніе, при которомъ удовлетворилось бы условное уравненіе (a).

Такъ какъ подъинтегральное выраженіе (c) содержитъ только перемѣнную независимую l и неизвѣстную намъ функцію d этой перемѣнной и *не содержитъ производныхъ этой функціи*, то рѣшеніе задачи значительно упрощается и приводитъ къ уравненію, которое получится, если приравняемъ нулю производную по d подъинтегральнаго количества (c), разсматривая въ немъ перемѣнную независимую l какъ постоянное количество. И такъ для опредѣленія d имѣемъ уравненіе:

$$1 - 5\lambda\left(P + Q\frac{L-l}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^6} = 0$$

откуда $$d = \sqrt[6]{5\lambda} \cdot \sqrt[3]{P + Q\frac{L-l}{L}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

Слѣдов. видимъ, что *діаметры сѣченій трубы должны быть пропорціональны корню кубичному изъ объемовъ, протекающихъ въ 1'' чрезъ эти сѣченія.*

Для окончательнаго опредѣленія діаметра d, нужно еще найти значеніе множителя λ, а для этого нужно найденное значеніе для d внести въ уравненіе (a) и изъ него опредѣлить этотъ множитель. Сдѣлавъ это на самомъ дѣлѣ, получаемъ:

$$\gamma H \,.\, (5\lambda)^{\frac{5}{6}} = \int_0^L \left(P + Q\frac{L-l}{L}\right)^{\frac{1}{3}} . \, dl = \tfrac{3}{4}\frac{L}{Q}\left[(P+Q)^{\frac{4}{3}} - P^{\frac{4}{3}}\right]$$

откуда $$\sqrt[6]{5\lambda} = \sqrt[5]{\tfrac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{L}{\gamma H Q}} \times \sqrt[5]{(P+Q)^{\frac{4}{3}} - P^{\frac{4}{3}}}$$

или $$\sqrt[6]{5\lambda} = 0{,}94407\sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \times \sqrt[5]{\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{Q}} \,.\; (e)$$

Слѣдов., окончательно для искомаго діаметра d имѣемъ формулу:

$$d = 0{,}94407\sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \times \sqrt[5]{\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{Q} + \frac{L-l}{L}} . \; (39)$$

Въ случаѣ же, когда труба будетъ имѣть только расходъ на пути, т.-е. когда $P = 0$,

$$d = 0{,}94407 \,.\, \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \times \sqrt[3]{\frac{L-l}{L}} \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

Для стоимости водопровода, имѣющаго наивыгоднѣйшій діаметръ, изъ формулъ (*b*) и (*d*) получаемъ:

$$K = 0{,}70806\,\xi L \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \times \left[\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}; \quad . \quad (41)$$

а въ случаѣ, когда $P = 0$,

$$K = 0{,}70806\,\xi L \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{\gamma H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Еслибы, въ этомъ послѣднемъ случаѣ, былъ построенъ водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ, то онъ стоилъ бы K', а именно:

$$K' = \xi \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{\gamma H}} \times L = 0{,}80274\,\xi L \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{\gamma H}}.$$

Откуда слѣдуетъ, что $\quad K = 0{,}832\,K'$.

Полезно замѣтить, что *скорость движенія воды въ различныхъ сѣченіяхъ трубы, имѣющей діаметры наивыгоднѣйшіе, пропорціональна діаметру этихъ сѣченій,* какъ въ этомъ не трудно убѣдиться.

Еслибы пожелали опредѣлить діаметры сѣченій трубы по условію, чтобы линія дѣйствительныхъ давленій была бы прямою, то для уравненія этой прямой имѣли бы

$$y = \frac{H}{F} l \quad \text{и} \quad \partial y = \frac{H}{L} \partial l,$$

а такъ какъ въ то же время

$$\partial y = \frac{\left(P + Q\,\frac{L-l}{L}\right)^2}{\gamma d^5} \,.\, \partial l,$$

то $$d = \sqrt[5]{\frac{L}{\gamma H}\left(P + Q\,\frac{L-l}{L}\right)^{\frac{2}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \,.\, \left(\frac{P}{Q} + \frac{L-l}{L}\right)^{\frac{2}{5}}; \quad . \quad (43)$$

а для стоимости K'' такого водопровода имѣли бы

$$K'' = \tfrac{5}{7}\,\xi L \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \left[\left(1+\frac{P}{Q}\right)^{\frac{7}{5}} - \left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{7}{5}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

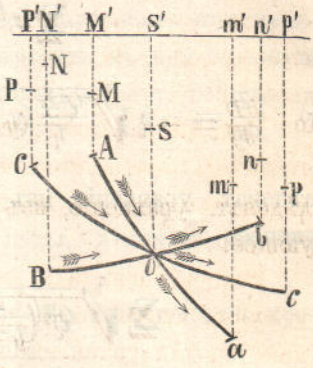
слѣдов., въ случаѣ, когда $P = 0$

$$K'' = 0{,}7143\xi L \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{\gamma H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

что очень близко къ значенію, доставляемому для этого случая формулою (42).

Третья задача будетъ состоять въ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго положенія для піезометрическаго уровня въ данномъ узлѣ сѣти, такъ какъ, оказывается, что положеніе этого уровня до извѣстной степени предоставляется выбору проектирующаго сѣть.

Пусть на фигурѣ 62 точка O представляетъ узелъ, въ которомъ сходятся вѣтви AO, BO, CO ..., доставляющія воду въ точку O и вѣтви Oa, Ob, Oc ..., отводящія воду изъ этого узла. Пусть притомъ M, N, P ..., m, n, p ..., обозначаютъ положенія піезометрическихъ уровней въ сѣченіяхъ A, B, C ..., a, b, c ...; Q, Q', Q'' ... расходы вѣтвей AO, BO, CO ..., а q, q', q'' ... тоже для вѣтвей Oa, Ob, Oc ...; L, L', L'' ... длина вѣтвей AO, BO, CO ..., а l, l', l'' ... тоже для вѣтвей Oa, Ob, Oc ...; наконецъ, пусть $M'M = Z$, $N'N = Z'$, $P'P = Z''$ ... и $m'm = z$, $n'n = z'$, $p'p = z''$ ... будутъ напоры (считаемые отъ уровня какой-либо горизонтальной плоскости) для сѣченій A, B, C ..., a, b, c, ...



Фиг. 62.

Чтобы движеніе воды могло совершаться въ указанномъ направленіи, необходимо, чтобы піезометрическій уровень для узла O лежалъ ниже самаго нижняго изъ уровней M, N, P ..., и выше самаго верхняго изъ уровней m, n, p ... Пусть S будетъ положеніе этого уровня, избранное произвольно въ указанныхъ предѣлахъ. Называя напоръ $S'S$ для узла O буквою y, получаемъ для діаметровъ D, D', D'' ... вѣтвей AO, BO, CO ... и для діаметровъ d, d', d'' ... вѣтвей Oa, Ob, Oc, ... слѣдующія выраженія:

$$D = \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{\gamma(y-Z)}};\quad D' = \sqrt[5]{\frac{Q'^2 L'}{\gamma(y-Z')}};\ \text{и т. д.}$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{q^2 l}{\gamma(z-y)}};\quad d' = \sqrt[5]{\frac{q'^2 l'}{\gamma(z'-y)}};\ \text{и т. д.}$$

Но стоимость разсматриваемой сѣти трубъ пропорціональна количеству

$$DL + D'L' + \ldots + dl + d'l' + \ldots$$

которое и должно превратить въ наименьшее надлежащимъ выборомъ численнаго значенія для напора y.

Приравнивая нулю производную этого количества, взятую по y, получимъ:

$$\sum L \frac{\partial D}{\partial y} + \sum l \frac{\partial d}{\partial y} = 0.$$

Но $\dfrac{\partial D}{\partial y} = -\frac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{Q^2 L}{\gamma}}(y-Z)^{-\frac{6}{5}};\quad \dfrac{\partial d}{\partial y} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{q^2 l}{\gamma}}(z-y)^{-\frac{6}{5}};$

Слѣдоват. уравненіе, изъ котораго должно искать y, есть слѣдующее:

$$\sum \sqrt[5]{Q^2\left(\frac{L}{y-Z}\right)^6} = \sum \sqrt[5]{q^2\left(\frac{l}{z-y}\right)^6} \quad \ldots \quad (46)$$

Уравненіе это можно рѣшить попытками, такъ какъ предѣлы, внутри которыхъ лежитъ искомая величина y, всегда будутъ извѣстны.

Имѣя въ виду, что

$$\frac{L}{y-Z} = \frac{\gamma D^5}{Q^2} \quad \text{и} \quad \frac{l}{z-y} = \frac{\gamma d^5}{q^2}$$

можно предъидущему уравненію придать слѣдующій видъ:

$$\sum \left(\frac{D^3}{Q}\right)^2 = \sum \left(\frac{d^3}{q}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (46\ \text{bis})$$

Это уравненіе указываетъ на зависимость между діаметрами и расходами вѣтвей, сходящихся въ узлѣ, какая будетъ существовать, когда условіе наименьшей затраты капитала на построеніе этой системы будетъ выполнено.

Четвертая и послѣдняя задача будетъ состоять въ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго діаметра трубы, при помощи которой нагнетается вода насосами въ верхній резервуаръ, снабжающій всю сѣть.

Пока условіе наименьшей затраты капитала, какъ на построеніе этой трубы, такъ и на покупку водокачальной машины и топлива для нея, не введено, діаметръ трубы остается произвольнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, каковъ бы ни былъ этотъ діаметръ, всегда можно, поставивъ достаточно сильную машину, доставить въ верхній резервуаръ требуемое количество воды.

Вліяніе діаметра трубы здѣсь будетъ состоять въ томъ, что съ уменьшеніемъ его уменьшится стоимость трубы; но зато возрастетъ стоимость машины и топлива, такъ какъ при меньшемъ діаметрѣ трубы нужно будетъ допустить въ ней большую скорость движенія, а слѣдов. и большую затрату работы на треніе.

Пусть будутъ:

Q, L и D объемъ поднимаемой въ $1''$ воды, длина и діаметръ трубы;

H полная высота подъема и h увеличеніе этой высоты производимое дѣйствіемъ тренія въ трубѣ;

n число часовъ суточной работы машины;

f стоимость каждой паровой лошади силы машины и

c стоимость топлива, нужнаго для произведенія 1000 килограммометровъ работы.

Тогда стоимость трубы будетъ равна ξDL.

Такъ какъ работа машины въ $1''$ равна

$$\Delta Q(H+h) \text{ кил. метр.} = \frac{\Delta}{75} \,.\, Q(H+h) \text{ пар. лошадей}$$

то стоимость машины будетъ равна

$$f\frac{\Delta}{75}\,Q(H+h).$$

Стоимость топлива, расходуемаго въ $1''$, равна

$$c\frac{\Delta Q(H+h)}{1000}=cQ(H+h)$$

а въ теченіи года равна $365\times 3600\times ncQ(H+h)$.

Но расходъ на покупку топлива не есть единовременный, а постоянный, поэтому необходимо имѣть запасный капиталъ, съ процентовъ котораго можно было бы покупать топливо. Считая прибыль съ капитала въ 5%, должно имѣть капиталъ, равный

$$20\times 365\times 360\times ncQ(H+h).$$

Такимъ образомъ полный капиталъ K, который должно обратить въ наименьшій, приличнымъ выборомъ діаметра D нагнетательной трубы, есть слѣдующій:

$$K=\xi DL+f\frac{\Delta}{75}Q(H+h)+20\times 365\times 3600\times ncQ(H+h)$$

или $$K=\xi DL+AQ(H+h)\quad\ldots\ldots\quad(a)$$

гдѣ $$A=f\cdot\frac{\Delta}{75}+10\times 365\times 3600\times nc\quad\ldots\ldots\quad(b)$$

и $$h=\frac{Q^2L}{\gamma D^5}\quad\ldots\ldots\quad(c)$$

Приравнивая нулю производную выраженія (a), взятую по D, найдемъ:

$$\xi L+AQ\frac{\partial h}{\partial D}=0;\ \text{но}\ \frac{\partial h}{\partial D}=-\frac{5Q^2L}{\gamma D^6},$$

поэтому $$D=\sqrt[9]{\frac{5A}{\xi\gamma}}\cdot\sqrt{Q}\quad\ldots\ldots\quad(47)$$

Движеніе газообразныхъ жидкостей.

94. Выведенные въ №№ 20 и 21 уравненія (2), (3) и (4) могутъ служить, какъ это и было указано, для опредѣленія обстоятельствъ движенія газообразныхъ жидкостей, но число этихъ уравненій будетъ недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ вопроса, если только температура газообразной жидкости, во время движенія, будетъ мѣняться. Предполагая даже, что температура жидкости дѣйствительно остается постоянною, указанныя уравненія не разрѣшатъ вопроса вполнѣ, такъ какъ изъ нихъ нельзя будетъ вывести никакихъ заключеній относительно тѣхъ условій, при которыхъ, въ данномъ случаѣ движенія, температура можетъ оставаться постоянною. Дѣйствительно, въ одномъ случаѣ неизмѣняемость температуры жидкости будетъ возможна только при существованіи извѣстнаго нагрѣванія ея, въ другомъ—напротивъ того, только при существованіи охлажденія, причемъ количество теплоты, затраченной на нагрѣваніе въ одномъ случаѣ или отнятой въ другомъ случаѣ, не опредѣлится указанными уравненіями.

Вполнѣ обстоятельное рѣшеніе вопроса о движеніи газообразныхъ жидкостей возможно, слѣдовательно, только при помощи началъ механической теоріи теплоты. Вытекающія изъ основныхъ началъ этой теоріи формулы, вмѣстѣ съ указанными уравненіями движенія, составятъ систему уравненій, вполнѣ достаточныхъ для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ вопроса.

Такъ какъ въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду разсматривать движеніе только такъ-называемыхъ постоянныхъ газовъ, не касаясь обстоятельствъ движенія паровъ, то и считаемъ необходимымъ предварительно возобновить въ памяти читателя какъ нѣкоторыя свойства постоянныхъ газовъ, такъ и тѣ предложенія и формулы механической теоріи теплоты, которыя намъ будутъ необходимы при рѣшеніи разсматриваемаго вопроса.

95. *Физическія свойства постоянныхъ газовъ.*

Если назовемъ чрезъ p давленіе въ килограммахъ на квадратный метръ, производимое газомъ на стѣнки того сосуда, внутри котораго онъ заключенъ, чрезъ v объемъ въ кубическихъ метрахъ, занимаемый каждымъ килограммомъ газа и чрезъ t температуру его по Цельзіеву термометру, то, на основаніи опытовъ Маріота и Гэ-Люссака, зависимость между количествами p, v и t, для постояннаго газа, выражается слѣдующею формулою

$$pv = R(a + t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

въ которой R есть число, постоянное для каждаго даннаго газа, но различное для различныхъ газовъ, а именно, число это *обратно пропорціонально плотности газа*; число же a постоянно и притомъ одинаково для всѣхъ газовъ, а именно, $a = 273$. Число $\frac{1}{a}$, обратное числу a, есть такъ-называемый *коэффиціентъ расширенія газа* *).

Численное значеніе количества R для различныхъ газовъ есть слѣдующее:

для атмосфернаго воздуха . . . . . $R =$ 29,272,
для азота, плотность котораго равна
0,97137, принимая плотность воздуха
за единицу . . . . $R =$ 30,134,

---

*) Въ дѣйствительности a для различныхъ газовъ нѣсколько различно, а это значитъ, что формула (1), если разсматривать въ ней a какъ число постоянное и одинаковое для всѣхъ газовъ, будетъ представлять для нихъ зависимость между p, v и t не съ совершенною строгостью, т.-е. что существующіе газы представляютъ нѣкоторое уклоненіе отъ законовъ Маріота и Гэ-Люссака, а потому и не принадлежатъ со всею строгостью къ числу постоянныхъ газовъ.

для кислорода (плотность 1,10563) . . $R = 26,475$,
для водопровода (плотность 0,06926). . $R = 422,613$,

Данныя здѣсь значенія для R и a относятся къ случаю, когда газъ будетъ совершенно сухой; въ приложеніяхъ же, при рѣшеніи различныхъ вопросовъ, касающихся движенія атмосфернаго воздуха, придется имѣть въ виду, что атмосферный воздухъ будетъ въ большинствѣ случаевъ содержать нѣкоторое количество водяного пара. Присутствіе въ воздухѣ водяного пара дѣлаетъ его болѣе легкимъ и въ то же время измѣняетъ нѣсколько его коэффиціентъ расширенія. Опыты показываютъ, что для влажнаго атмосфернаго воздуха точнѣе будетъ принимать

$$\frac{1}{a} = 0,004, \quad a = 250 \quad \text{и} \quad R = 31,964.$$

Затѣмъ опыты показываютъ, что для постоянныхъ газовъ, *теплоемкость при постоянномъ давленіи*, которую мы будемъ обозначать чрезъ c, и *теплоемкость при постоянномъ объемѣ*, которую будемъ обозначать чрезъ c', суть количества постоянныя, но различныя для различныхъ газовъ, а именно, обратно пропорціональныя плотности газа; такъ что отношеніе этихъ теплоемкостей есть число постоянное и притомъ одинаковое для всѣхъ постоянныхъ газовъ.

Вотъ значеніе теплоемкости c для нѣкоторыхъ газовъ:

для атмосфернаго воздуха $c = 0,23751$
» азота. . . . . . . $c = 0,24380$
» кислорода. . . . . $c = 0,21751$
» водорода . . . . . $c = 3,40900$.

Отношеніе же $\frac{c}{c'}$ теплоемкости при постоянномъ давленіи къ теплоемкости при постоянномъ объемѣ, которое мы будемъ обозначать буквою k и которое, какъ было сказано выше, для всѣхъ постоянныхъ газовъ одинаково, равняется 1,41, то-есть

$$\frac{c}{c'} = k = 1,41.$$

Если физическое состоянiе постояннаго газа, опредѣляемое численными значенiями количествъ p, v и t, указанными въ началѣ настоящаго №, измѣнится, по какой бы то ни было причинѣ, такъ что новое его состоянiе будетъ опредѣляться количествами p', v' и t' отличными отъ p, v и t, то по формулѣ (1) будемъ имѣть

$$pv = R(a+t) \text{ и } p'v' = R(a+t')$$

а слѣдовательно,

$$\frac{pv}{p'v'} = \frac{a+t}{a+t'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если въ новомъ состоянiи газъ будетъ имѣть ту же температуру, что и въ начальномъ, то-есть если $t' = t$, то изъ формулы (2) получимъ

$$p : p' = v' : v = \delta : \delta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ $$\delta = \frac{1}{v} \text{ и } \delta' = \frac{1}{v'}$$

представляютъ плотности газа въ двухъ различныхъ его состоянiяхъ, т.-е. вѣсъ въ килограммахъ одного кубическаго метра газа.

Пропорцiя (3), имѣющая мѣсто въ случаѣ когда температура газа не мѣняется, выражаютъ собою законъ, извѣстный подъ именемъ *закона Марiота*.

Если въ новомъ состоянiи газъ будетъ подверженъ такому же давленiю, какъ и въ начальномъ, т.-е. если $p' = p$, то формула (2) доставитъ

$$v : v' = a+t : a+t'$$

откуда $$\frac{v'-v}{v} = \frac{t'-t}{a+t} \text{ или } \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{v}{a+t};$$

умножая же числителя и знаменателя второй части послѣдняго выраженiя на p, замѣняя потомъ pv равною ему величиною $R(a+t)$ и сокращая на $a+t$, получимъ

$$\frac{v'-v}{t'-t} = \frac{R}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такъ какъ давленіе p предполагается теперь постояннымъ, а количество R также постоянно, то формула (4) показываетъ, что приращеніе объема газа пропорціонально приращенію его температуры. Въ этомъ послѣднемъ предложеніи и заключается такъ-называемый *законъ Гэ-Люссака*, имѣющій мѣсто, когда газъ мѣняетъ свое состояніе при постоянномъ давленіи.

Въ приложеніяхъ весьма часто приходится предполагать, что состояніе газа мѣняется, слѣдуя, такъ называемому, закону *Лапласа* и *Пуассона*, выражающемуся формулою

$$\frac{p}{p'}=\left(\frac{v'}{v}\right)^k, \text{ гдѣ } k=1{,}41 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и имѣющему мѣсто тогда, когда во время измѣненія состоянія газа онъ не получаетъ теплоты извнѣ и не испускаетъ изъ себя теплоты во внѣшнее пространство, т.-е. когда онъ окруженъ оболочкою, непроницаемою для теплоты, но дозволяющею ему свободно расширяться.

Замѣтимъ, что формула (5), при помощи уравненія (1), можетъ быть представлена еще въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$\frac{a+t}{a+t'}=\left(\frac{v'}{v}\right)^{k-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{p}{p'}=\left(\frac{a+t}{a+t'}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Первый основной законъ механической теоріи теплоты, будучи примѣненъ къ постояннымъ газамъ, приводитъ къ слѣдующей формулѣ

$$c-c'=AR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ c, c' и R суть количества, значенія которыхъ указаны выше, а A есть, такъ называемый, *калорическій эквивалентъ работы*, число равное $\frac{1}{425}$ если за единицу работы принимаемъ килограммометръ, а за единицу теплоты то количество теплоты, которое нужно, чтобы одинъ килограммъ воды, при среднемъ атмосферномъ давленіи и при температурѣ 0°, нагрѣтъ до температуры 1° по Цельзіеву термометру.

При помощи перваго же закона механической теоріи теплоты доказывается еще слѣдующее замѣчательное свойство газовъ: какимъ бы образомъ не происходило измѣненіе состоянія постояннаго газа, *внутренняя теплота* этого тѣла всегда получаетъ такое приращеніе, какое получила бы, еслибы объемъ газа оставался неизмѣннымъ. Обозначая безконечно малое приращеніе внутренней теплоты чрезъ ∂U, должно, на основаніи сказаннаго свойства, принять для постоянныхъ газовъ

$$\partial U = c' \partial t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

или, имѣя въ виду, что

$$\frac{c}{c'} = k \quad \text{и} \quad c - c' = AR,$$

$$\partial U = \frac{AR}{k-1} \partial t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9 \text{ bis})$$

Наконецъ, обозначая чрезъ ∂Q безконечно малое количество теплоты, притекающей къ газу извнѣ (или вытекающей изъ него во внѣшнее пространство, когда $\partial Q < 0$), первый основной законъ механической теоріи теплоты даетъ намъ, для опредѣленія количество ∂Q, слѣдующую формулу:

$$\partial Q = \partial U + Ap\partial v = \frac{AR}{k-1} \partial t + Ap\partial v \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

въ которой членъ $Ap\partial v$ представляетъ собою ту часть теплоты ∂Q, которая преобразовалась въ механическую работу внѣшнихъ давленій, дѣйствующихъ на точки поверхности, ограничивающей разсматриваемый газъ.

Если разсматриваемый газъ будетъ претерпѣвать нѣкоторое конечное измѣненіе своего состоянія такъ, что объемъ, занимаемый однимъ килограммомъ его изъ v_1 превратиться въ v_2, отличающееся отъ v_1 на конечную величину, то механическая работа внѣшнихъ давленій, для каждаго килограмма газа, изобразится интеграломъ

$$\int_{v_1}^{v_2} p\partial v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

численное значеніе котораго возможно будетъ найти тогда только, когда извѣстенъ будетъ законъ, сообразно которому мѣнялось давленіе p во время измѣненія объема.

96. *Истеченіе газовъ изъ сосудовъ чрезъ отверстія.*

Ограничиваясь случаемъ установившагося движенія и пренебрегая сопротивленіями, происходящими отъ тренія, мы должны будемъ, для опредѣленія скорости истеченія, воспользоваться уравненіемъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{dp}{\mu} + VdV$$

въ которомъ μ есть плотность газа, а произведеніе μ на ускореніе g силы тяжести будетъ равно вѣсу одного кубическаго метра газа. Обозначая этотъ вѣсъ буквою δ, будемъ имѣть:

$$\mu = \frac{\delta}{g}.$$

Направимъ координатную ось z по вертикальной линіи снизу вверхъ, т.-е. примемъ

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g,$$

предполагая, само собою разумѣется, что на всѣ частицы газа, кромѣ силы тяжести, никакія другія внѣшнія силы не дѣйствуютъ; тогда предъидущее уравненіе можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dp}{\delta} + \frac{VdV}{g} + dz = 0 \quad \text{или} \quad \frac{VdV}{g} + vdp + dz = 0.$$

Но
$$vdp = d(pv) - pdv$$
поэтому имѣемъ
$$\frac{VdV}{g} + d(pv) - pdv + dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Приступая къ интегрированію этого уравненія, когда дѣло идетъ объ опредѣленіи скорости истеченія газа изъ сосуда, всегда можно въ уравненіи этомъ отбросить количество dz, то-есть пренебречь членомъ gdz, выражающимъ собою извѣстную работу вѣса газа, такъ какъ истеченіе газовъ изъ сосудовъ происходитъ исключительно отъ разности давленій, существующихъ какъ внутри сосуда, изъ котораго совершается истеченіе, такъ и въ томъ пространствѣ, куда газъ вытекаетъ; собственный же вѣсъ газа почти никакого вліянія на скорость истеченія не обнаруживаетъ.

Такимъ образомъ, для рѣшенія вопроса нужно будетъ интегрировать уравненіе

$$\frac{V\partial V}{g} + \partial(pv) - p\partial v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Пусть p_0 и v_0 будутъ обозначать давленіе и объемъ, занимаемый однимъ килограммомъ газа, заключеннаго въ сосудѣ, а p_1 и v_1 давленіе и относительный объемъ газа въ томъ пространствѣ, куда совершается истеченіе; тогда, предполагая, что скорость частицъ газа, внутри сосуда находящихся, чрезвычайно мала въ сравненіи со скоростью V истеченія, въ моментъ прохожденія частицъ чрезъ отверстіе, получимъ по совершеніи интегрированія

$$\frac{V^2}{2g} + p_1v_1 - p_0v_0 - \int_{v_2}^{v_1} p\partial v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Для полнаго опредѣленія скорости V должна быть задана зависимость p отъ v, т.-е. должны быть указаны обстоятельства, сопровождающія явленіе истеченія.

Случай первый. Температура газа во время истеченія не мѣняется.

Въ случаѣ истеченія при постоянной температурѣ, давленіе газа должно мѣняться, слѣдуя закону Маріота; поэтому,

$$p_1 : p_0 = v_0 : v_1 \text{ или } p_1v_1 = p_0v_0$$

и притомъ вообще

$$pv = p_0v_0 = p_1v_1$$

откуда $\quad p_1v_1 - p_0v_0 = 0$ и $p = p_0v_0\frac{1}{v} = p_1v_1\frac{1}{v}$

слѣдовательно,

$$\frac{V^2}{2g} = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \log\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = p_0 v_0 \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

гдѣ вмѣсто $p_0 v_0$ можно внести $p_1 v_1$ и въ то же время вмѣсто v_0 или v_1 внести $\frac{1}{\delta_0}$ или $\frac{1}{\delta_1}$; наконецъ, обозначая чрезъ t температуру, которая остается постоянною воличиною, можно вмѣсто $p_0 v_0$ внести $R(a+t)$. Такимъ образомъ, для скорости истеченія, окончательно, получаемъ формулу

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{2g\frac{p_0}{\delta_0}\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} = \sqrt{2g\frac{p_0}{\delta_1}\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} = \\ &= \sqrt{R(a+t)\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad . \quad (15)$$

Умножая скорость на площадь отверстія $\tilde{\omega}$, получимъ объемъ q вытекающаго газа въ $1''$. Слѣдовательно,

$$q = \tilde{\omega}\sqrt{2g\frac{p_0}{\delta_1}\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Желая же опредѣлить расходъ газа не по объему, но по вѣсу, нужно объемъ q умножить на плотность δ_1 и тогда вѣсъ P вытекающаго газа въ $1''$ будетъ опредѣляться формулою:

$$P = \tilde{\omega}\sqrt{2gp_1\delta_1\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Формулы (15), (16) и (17), вслѣдствіе существованія нѣкоторыхъ сопротивленій во время истеченія, не принятыхъ нами во вниманіе, и въ особенности вслѣдствіе сжатія струи газа, потребуютъ исправленія практическимъ коэффиціентомъ. Обозначая коэффиціентъ расхода буквою μ, какъ и въ случаѣ истеченія капельной жидкости, получимъ

$$q = \mu\tilde{\omega}V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

гдѣ, въ случаѣ истеченія изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ $\mu = 0{,}65$; въ случаѣ короткой цилиндрической трубочки $\mu = 0{,}9$;

въ случаѣ же слабо конической трубочки (когда уголъ при вершинѣ конуса около 12°) $\mu = 0,95$.

Выведенныя только-что формулы могутъ быть нѣсколько упрощены, если разность $p_0 - p_1$ давленій будетъ невелика въ сравненіи съ p_1. Въ такомъ случаѣ количество $\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$ можно будетъ разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ дроби $\frac{p_0-p_1}{p_1}$ и ограничиться нѣсколькими первыми членами разложенія.

Мы имѣемъ

$$\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \log\left(1 + \frac{p_0-p_1}{p_1}\right) = \frac{p_0-p_1}{p_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_0-p_1}{p_1}\right)^2 + \xi^3.$$

гдѣ ξ^3 представляетъ совокупность членовъ третьяго и высшихъ порядковъ. Затѣмъ

$$\frac{p_0-p_1}{p_1} - \frac{p_0-p_1}{p_0} = \frac{(p_0-p_1)^2}{p_1 p_0}$$

откуда

$$\frac{p_0-p_1}{p_0} = \frac{p_0-p_1}{p_1} - \frac{(p_0-p_1)^2}{p_1 p_0}$$

слѣдовательно,

$$\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) - \frac{p_0-p_1}{p_0} = \frac{(p_0-p_1)^2}{p_1}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2p_1}\right) + \xi^3 =$$

$$= \frac{(p_0-p_1)^2}{2p_0 p_1^2}(2p_1 - p_0) + \xi^3$$

и такъ какъ $2p_1 - p_0 = p_1 - (p_0 - p_1)$

будетъ величиною положительною, потому что $p_0 - p_1$ предполагается незначительнымъ въ сравненіи съ p_1, то заключаемъ, что

$$\log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) < \frac{p_0-p_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) > \frac{p_0-p_1}{p_0}$$

поэтому

$$V < \sqrt{2g\frac{p_1}{\delta_1}\cdot\frac{p_0-p_1}{p_1}} \quad \text{или} \quad V < \sqrt{2g\frac{p_0-p_1}{\delta_1}}$$

и

$$V > \sqrt{2g\frac{p_0}{\delta_0}\cdot\frac{p_0-p_1}{p_0}} \quad \text{или} \quad V > \sqrt{2g\frac{p_0-p_1}{\delta_0}}$$

откуда видимъ, что обозначая чрезъ δ среднюю ариѳметическую величину изъ плотностей δ_0 и δ_1, можно, въ разсматриваемомъ случаѣ, принять

$$V = \sqrt{2g\frac{p_0 - p_1}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

гдѣ
$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_0) = \frac{p_1 + p_0}{2R(a + t)},$$

поэтому, послѣднюю формулу можно представить еще и въ видѣ

$$V = \sqrt{2gR(a + t)\frac{2(p_0 - p_1)}{p_0 + p_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Чтобы получить понятіе о томъ, какъ велика можетъ быть скорость истеченія, положимъ, что сухой атмосферный воздухъ вытекаетъ изъ сосуда, въ которомъ давленіе равно 1,2 атмосферы, въ пространство, гдѣ давленіе равно атмосферному, причемъ температура его равна 12° C остается постоянною.

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{p_0 - p_1}{p_0 + p_1} = \frac{0{,}2}{2{,}2} = \frac{1}{11},\ a + t = 285, \quad R = 29{,}272 \quad \text{и} \quad g = 9{,}81$$

слѣдовательно,

$$V = \sqrt{\frac{4 \times 9{,}81 \times 285 \times 29{,}272}{11}} = 172{,}511 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, скорость истеченія получается весьма значительная, несмотря на сравнительно небольшую разницу въ давленіяхъ внутри и внѣ сосуда.

Для полнаго ознакомленія съ разсматриваемымъ теперь случаемъ истеченія необходимо отдать себѣ отчетъ, при какихъ обстоятельствахъ подобный случай можетъ осуществиться въ дѣйствительности.

Предположеніе, что температура газа во время истеченія не мѣняется, выражается аналитически условіемъ

$$dt = 0,$$

поэтому уравненіе (10) предъидущаго нумера, для разсматриваемаго случая, принимаетъ видъ

$$\partial Q = Apdv,$$

что по интегрированіи доставитъ

$$Q = Ap_0v_0 \log\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = A\frac{p_0}{\delta_0} \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = A\frac{V^2}{2g} \quad . \quad . \quad (21)$$

Такъ какъ, въ указанной формулѣ (10), количество Q изображаетъ собою ту теплоту, которую должно затратить на нагрѣваніе каждаго килограмма тѣла во время измѣненія его состоянія и такъ какъ, въ разсматриваемомъ теперь случаѣ, для Q получается величина положительная, равная $A\frac{V^2}{2g}$, то заключаемъ, что при истеченіи газа температура его можетъ остаться постоянною тогда только, когда будетъ существовать нагрѣваніе газа или притокъ къ нему теплоты извнѣ въ количествѣ, равномъ $A\frac{V^2}{2g}$ единицъ на каждый килограммъ вытекающаго газа.

Случай второй. Истеченіе газа при постоянной плотности.

Если плотность, а слѣдовательно и объемъ v, занимаемый однимъ килограммомъ газа, не будутъ мѣняться, тогда въ уравненіи (14) должно будетъ принять

$$v_1 = v_0 = \frac{1}{\delta},$$

и уравненіе это доставитъ

$$V = \sqrt{2g\frac{p_0 - p_0}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Но теперь $\frac{p_0}{\delta} = R(a + t_0)$ и $\frac{p_1}{\delta} = R(a + t_1)$

поэтому,

$$\frac{p_0 - p_1}{\delta} = R(t_0 - t_1) \quad \text{и} \quad V = \sqrt{2gR(t_0 - t_1)} \quad . \quad (22 \text{ bis})$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ температура t_0 внутри сосуда, изъ котораго вытекаетъ газъ, будетъ болѣе температуры t_1, какую онъ имѣетъ въ моментъ прохожденія чрезъ отверстіе.

Уравненіе (10), опредѣляющее количество теплоты Q, притекающей къ газу извнѣ, доставитъ

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{AR}{k-1}\int_{t_0}^{t_1} \partial t = \frac{AR}{k-1}(t_1 - t_0) = \\ &= -\frac{AR}{k-1}(t_0 - t_1) = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{V^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

т.-е. во время истеченія плотность газа можетъ оставаться постоянною тогда только, когда будетъ существовать такое охлажденіе газа, что каждый килограммъ его, въ моментъ прохожденія чрезъ отверстіе, передастъ окружающей его средѣ $\frac{A}{k-1}\cdot\frac{V^2}{2g}$ единицъ теплоты.

Случай третій. Истеченіе газа безъ притока къ нему теплоты извнѣ и безъ потери ея во внѣшнее пространство.

Въ настоящемъ случаѣ въ уравненіи (10) должно принять $\partial Q = 0$ и тогда уравненіе это доставитъ

$$\frac{R\partial t}{k-1} + p\partial v = 0 \quad \text{или} \quad R\partial t + (k-1)p\partial v = 0$$

но такъ какъ $R\partial t = \partial(pv) = p\partial v + v\partial p,$

то имѣемъ

$$p\partial v + v\partial p + (k-1)p\partial v = 0 \quad \text{или} \quad v\partial p + kp\partial v = 0$$

или наконецъ $\frac{\partial p}{p} + k\frac{\partial v}{v} = 0,$

откуда, интегрируя, получаемъ

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^k$$

т.-е. давленія и объемы мѣняются, слѣдуя закону Лапласа и Пуассона, какъ и должно было ожидать.

Вносdefinitely я въ уравненіе (14) подъ знакомъ интеграла вмѣсто p его величину

$$p_0 v_0^k \frac{1}{v^k}$$

и совершая на самомъ дѣлѣ интегрированіе, получимъ

$$\frac{V^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right].$$

Но $$\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^k,\ \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}=\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}};$$

слѣдовательно,

$$p_0 v_0 - p_1 v_1 = \left(1-\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}\right) p_0 v_0 = p_0 v_0 \left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

и $$1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1} = 1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

поэтому,

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{2g\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_0}{\delta_0}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = \\ &= \sqrt{2g\frac{k}{k-1}R(a+t_0)\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (24)$$

Наконецъ, такъ какъ по уравненію (7)

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{a+t_1}{a+t_0},$$

послѣднее выраженіе для скорости V можно будетъ представить еще и въ слѣдующемъ видѣ:

$$V=\sqrt{2g\frac{k}{k-1}R(t_0-t_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24 \text{ bis})$$

Для примѣра положимъ, что совершается истеченіе воздуха изъ сосуда, внутри котораго давленіе равно 1,2 атмосферы, въ пространство, гдѣ давленіе равно атмосферному, причемъ температура воздуха въ сосудѣ равна 12° C.

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{273+t_1}{273+12}=\left(\frac{1}{1{,}2}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}},$$

откуда

$$273+t_1 = 285\times\left(\frac{10}{12}\right)^{\frac{41}{141}} \quad \text{и} \quad t_1 = -2{,}718.$$

Такова будетъ температура t_1 въ отверстіи. Затѣмъ имѣемъ

$$t_0 - t_1 = 14{,}718;$$

слѣдовательно,

$$V=\sqrt{2\times 9{,}81\times\frac{141}{41}\times 29{,}272\times 14{,}718} = 170{,}5 \text{ метр.},$$

что немногимъ отличается отъ результата, найденнаго при тѣхъ же значеніяхъ для давленій p_0 и p_1 и температуры t_0 внутри сосуда, въ первомъ случаѣ, когда существовало нагрѣваніе извнѣ.

Коэффиціенты скорости, расхода и сжатія, для случая истеченія безъ притока теплоты извнѣ и безъ потери ея во внѣшнее пространство, могутъ быть взяты тѣ же, что и въ случаѣ истеченія при постоянной температурѣ *).

97. *Движеніе газовъ въ трубахъ.*

Формула (12) предъидущаго № можетъ послужить для опредѣленія обстоятельствъ установившагося движенія газа въ трубѣ болѣе или менѣе значительной длины, если только въ формулу эту введемъ членъ, зависящій отъ сопротивленій движенію, которыми при значительной длинѣ трубъ нельзя пренебрегать безъ чувствительной погрѣшности.

Пусть ∂y обозначаетъ ту высоту, которая теряется на сопротивленіе движенію на безконечно малой длинѣ трубы; тогда вмѣсто указанной формулы (12) должно будетъ взять слѣдующую:

$$\frac{V\partial V}{g} + v\partial p + \partial z + \partial y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Назовемъ чрезъ ∂q число единицъ теплоты, передаваемой каждому килограмму газа стѣнками трубы на безконечно маломъ протяженіи ея и замѣтимъ, что по началамъ механической теоріи теплоты всякія сопротивленія движенію, подобныя тренію и ударамъ, состоятъ въ преобразованіи живой силы видимаго движенія въ живую силу движенія молекулярнаго, невидимаго для насъ, то-есть въ теплоту; поэтому предполагая, что на безконечно малой длинѣ трубы происходитъ потеря высоты ∂y на сопротивленіе, дожно допустить, что на этой длинѣ каждый килограммъ газа пріобрѣтаетъ количество теплоты, равное $A\partial y$, такъ что полное количество единицъ теплоты, передаваемое каждому килограмму газа на безконечно малой длинѣ трубы, будетъ

*) См. опыты Вейсбаха, помѣщенные въ Civilingenieur, T. V. и въ Ingenieur und Maschinen-Mechanik.

равно суммѣ $\partial q + A\partial y$. Обозначая это полное количество теплоты чрезъ ∂Q, получимъ

$$\partial Q = \partial q + A\partial y = \frac{AR\partial t}{k-1} + Ap\partial v \text{ *)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Исключая же изъ уравненій (a) и (b) количество ∂y, получимъ уравненіе

$$\frac{V\partial V}{g} + \frac{R\partial t}{k-1} = \frac{\partial q}{A} - \partial z - \partial(pv) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

которое можно получить и независимо отъ уравненій (a) и (b), слѣдующимъ образомъ:

Пусть F обозначаетъ площадь поперечнаго сѣченія трубы, отстоящаго отъ начала трубы на разстояніи x, считаемомъ по ея оси, а G пусть будетъ вѣсъ протекающаго въ единицу времени газа чрезъ это сѣченіе; тогда замѣчая, что V представляетъ скорость въ сѣченіи, а v объемъ, занимаемый единицею вѣса газа, получимъ

$$FV = Gv. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

Живая сила протекающаго въ элементъ времени газа, чрезъ разсматриваемое сѣченіе, будетъ равна

$$\frac{G\tau}{2g} V^2,$$

гдѣ τ есть безконечно малый промежутокъ времени. Кромѣ этой живой силы, соотвѣтствующей видимому движенію, текущій по трубѣ газъ будетъ обладать еще живою силою, соотвѣтствующею невидимому для насъ движенію, движенію молекулярному. Эта послѣдняя живая сила, выраженная въ единицахъ теплоты, называется внутреннею теплотою газа и для одного килограмма газа представляется, слѣдуя обозначенію, принятому въ № 96, буквою U; поэтому для $G\tau$ килограммовъ живая сила молекулярнаго движенія будетъ равна

$$\frac{G\tau U}{A},$$

*) См. уравненіе (10) № 95.

а полная живая сила изобразится суммою

$$\frac{G\tau}{2g}V^2+\frac{G\tau U}{A}=G\tau\left(\frac{V^2}{2g}+\frac{U}{A}\right).$$

Въ слѣдующемъ сѣченіи трубы, отстоящемъ отъ начальнаго на разстояніи $x+\partial x$, указанная полная живая сила получитъ приращеніе, равное

$$G\tau\left(\frac{V\partial V}{g}+\frac{\partial U}{A}\right),$$

или замѣчая, что для газовъ

$$\partial U=\frac{AR}{k-1}\,\partial t$$

[уравн. (9 bis) № 95] для этого приращенія живой силы будемъ имѣть

$$G\tau\left(\frac{V\partial V}{g}+\frac{R}{k-1}\,\partial t\right). \qquad \text{(e)}$$

Это послѣднее выраженіе, какъ приращеніе полной живой силы, не должно зависѣть ни отъ работы упругости газа, ни отъ работы такихъ сопротивленій, какъ треніе и удары, потому что насколько отъ дѣйствія упругой силы газа увеличивается живая сила видимаго движенія, настолько въ то же время уменьшается живая сила движенія молекулярнаго, а отъ тренія и ударовъ обратно — насколько уменьшается живая сила видимаго движенія, на столько же возрастаетъ живая сила движенія молекулярнаго. Такимъ образомъ полное приращеніе живой силы должно равняться только работѣ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на всѣ точки разсматриваемой массы, какъ напримѣръ силы тяжести и силъ, приложенныхъ къ поверхности, ограничивающей эту массу, т.-е. внѣшнихъ давленій. Если же во время движенія разсматриваемой массы она будетъ получать нѣкоторое количество теплоты извнѣ, какъ въ случаѣ, теперь нами разсматриваемомъ, то эта теплота, выраженная въ единицахъ работы, должна быть присоединена къ работѣ внѣшнихъ силъ.

Начнемъ опредѣлять эти работы.

Пусть z и $z+\partial z$ будутъ вертикальныя разстоянія центровъ тяжести сѣченій, опредѣляемыхъ количествами x и $x+\partial x$, отъ нѣкоторой горизонтальной плоскости, расположенной ниже этихъ центровъ; тогда работа вѣса $G\tau$ на протяженіи ∂x трубы изобразится чрезъ

$$-G\tau\partial z.$$

Элементарная работа давленія p, дѣйствующаго въ сѣченіи F, будетъ

$$pFV\tau,$$

а работа давленія, приложеннаго къ слѣдующему за нимъ сѣченію, будетъ

$$-[pFV\tau+\partial(pFV)\tau],$$

слѣдовательно, алгебраическая сумма этихъ работъ будетъ

$$-\partial(pFV)\tau$$

или, въ силу равенства $FV=Gv$,

$$-G\tau\,.\,\partial(pv).$$

Работа давленій, происходящихъ отъ стѣнокъ трубы, если только форма ея такова, что поперечныя сѣченія мѣняются постепено, будетъ равна нулю, такъ какъ точки приложенія этихъ давленій перемѣщаются по направленіямъ, перпендикулярнымъ къ нимъ.

Наконецъ, теплота $G\tau\partial q$, по условію, передаваемая газу на протяженіи ∂x трубы отъ ея стѣнокъ, представленная въ единицахъ работы, будетъ

$$\frac{G\tau\partial q}{A};$$

поэтому по началу живыхъ силъ имѣемъ

$$G\tau\left(\frac{V\partial V}{g}+\frac{R}{k-1}\partial t\right)=-G\tau\partial z-G\tau\,\partial(pv)+G\tau\,\frac{\partial q}{A}$$

или $$\frac{V\partial V}{g}+\frac{R}{k-1}\partial t=\frac{\partial q}{A}-\partial z-\partial(pv),$$

что совершенно совпадаетъ съ уравненіемъ (c). И такъ для опредѣленія обстоятельствъ движенія газовъ въ трубахъ имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} FV &= Gv \\ pv &= \frac{p}{\delta} = R(a+t) \\ \frac{V\partial V}{g} &= -\frac{\partial p}{\delta} - dz - dy \\ \frac{\partial q}{A} + \partial y &= \frac{Rdt}{k-1} + pdv \end{aligned}\right\} \text{*)} \quad \ldots \quad (1)$$

и вытекающее, какъ слѣдствіе, изъ послѣднихъ двухъ

$$\frac{V\partial V}{g} + \frac{Rdt}{k-1} = \frac{\partial q}{A} - \partial z - \partial(pv) \quad \ldots \quad (1\text{ bis})$$

Если принебрежемъ сопротивленіями, происходящими отъ закругленій и изгибовъ трубы, и ограничимся только треніемъ, то для высоты ∂y, по аналогіи со случаемъ движенія капельныхъ жидкостей, можно будетъ принять

$$\partial y = 4b\,\frac{\partial x}{d}\,V^2 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

гдѣ d есть діаметръ разсматриваемаго сѣченія трубы, а b коэффиціентъ, котораго численное значеніе должно опредѣлить рядомъ опытовъ.

Количество теплоты ∂q, передаваемое газу стѣнками, можетъ быть опредѣлено по данной температурѣ t_0 средины, въ которой находится труба, и температурѣ t газа, внутри ея находящагося, когда извѣстна будетъ теплопроводность стѣнки. Для этой теплоты можно взять выраженіе

$$G\,.\,\partial q = \gamma\pi d\,(t_0 - t)\,dx \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

гдѣ γ есть коэффиціентъ теплопроводности стѣнки, а $\pi d \cdot dx$ ея поверхность, предполагая, что поверхность эта на всемъ протяженіи периметра πd окружена срединою съ температурою t_0.

---

*) См. статью Грасгофа, помѣщенную въ Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Band VII. 1863.

Еслибы случилось, что нѣкоторая часть s периметра была въ средѣ съ температурою t_0, а остальная часть s' въ средѣ съ температурою t'_0, то нужно было бы принять

$$G \,.\, \partial q = \gamma \left[s (t_0 - t) + s' (t'_0 - t) \right] \partial x \, . \quad . \quad . \quad (3 \text{ bis})$$

гдѣ
$$s + s' = \pi d.$$

Приложимъ теперь эти формулы къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

98. *Случай 1-й.* Газъ движется въ горизонтальной трубѣ съ постояннымъ діаметромъ, стѣнки которой окружены не проводниками теплоты.

Въ этомъ случаѣ въ предъидущихъ формулахъ должно принять

$$\partial z = 0, \quad \partial q = 0, \quad \text{а} \quad d \text{ и } F = \frac{\pi d^2}{4},$$

и разсматривать какъ постоянныя количества; поэтому для опредѣленія обстоятельствъ движенія будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$\left. \begin{aligned} FV &= Gv \\ pv &= R(a + t) \\ \frac{V \partial V}{g} + \frac{R \partial t}{k-1} + \partial (pv) &= 0 \\ 4b \frac{\partial x}{d} V^2 &= \frac{R \partial t}{k-1} + p \partial v. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Такъ какъ $\partial(pv) = R\partial t$, то предпослѣднее уравненіе можно написать въ видѣ

$$\frac{V \partial V}{g} + \frac{Rk}{k-1} \partial t = 0,$$

которое, по совершеніи интегрированія, доставитъ

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} + \frac{kR}{k-1} (t - t_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ V_0 и t_0 суть значенія скорости V и температуры t для начальнаго сѣченія трубы.

Первое и второе уравненія группы (a) даютъ

$$v = \frac{FV}{G},\ \partial v = \frac{F\partial V}{G},\ p = R(a+t)\frac{G}{VF}$$

и

$$pdv = R(a+t)\frac{\partial V}{V},$$

а потому послѣднее уравненіе той же группы обращается въ слѣдующее

$$4b\frac{\partial x}{d}V^2 = \frac{Rdt}{k-1} + R(a+t)\frac{\partial V}{V}.$$

Исключая же изъ этого послѣдняго уравненія t и dt, при помощи уравненія (b), получимъ

$$4b\frac{\partial x}{d}V^2 = -\frac{V\partial V}{kg} + \left(R(a+t_0) + \frac{V_0^2 - V^2}{2g}\cdot\frac{k-1}{k}\right)\frac{\partial V}{V}$$

или

$$4b\frac{\partial x}{d} = \left(R(a+t_0) + \frac{k-1}{k}\cdot\frac{V_0^2}{2g}\right)\frac{\partial V}{V^2} - \frac{k+1}{2kg}\cdot\frac{\partial V}{V},$$

откуда, по совершеніи интегрированія, найдемъ

$$16gb\frac{x}{d} = \left(R(a+t_0)\frac{2g}{V_0^2} + \frac{k-1}{k}\right)\varepsilon + \frac{k+1}{k}\operatorname{lognat}(1-\varepsilon) \qquad \text{(c)}$$

гдѣ для краткости принято

$$1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 = \varepsilon\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad \text{(d)}$$

Наконецъ, принимая

$$k = 1{,}41 \ \text{ и } \ R = \frac{29{,}272}{\Delta},$$

гдѣ Δ есть плотность газа въ предположеніи, что плотность воздуха равна единицѣ, получимъ

$$\left.\begin{aligned} 16gb\frac{x}{d} = \left(\frac{574{,}2774}{\Delta}\times\frac{273+t_0}{V_0^2} + 0{,}29\right)\varepsilon + \\ + 1{,}709\operatorname{lognat}(1-\varepsilon). \end{aligned}\right\}\ .\ . \qquad \text{(e)}$$

Численное значеніе коэффиціента (b) мы знаемъ съ меньшею точностью, нежели въ случаѣ движенія капельной жидкости.

Какъ среднюю данность, вытекающую изъ опытовъ Жирарда, д'Обюиссона, Буффа, Пеккера и въ особенности Вейсбаха *), можно принять

$$b = 0{,}00032,$$

но, при практическихъ приложеніяхъ, благоразумнѣе принимать для b значеніе нѣсколько большее, напримѣръ брать

$$b = 0{,}0004 \text{ или даже } b = 0{,}00048 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

Внося это послѣднее значеніе въ уравненіе (e), получимъ

$$\left.\begin{aligned} 0{,}075\,\frac{x}{d} = \left(\frac{574{,}2774}{\Delta} \times \frac{273 + t_0}{V_0^2} + 0{,}29\right)\varepsilon + \\ + 1{,}709\,\text{lognat}\,(1 - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(g)}$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда отношеніе ε будетъ находиться въ числѣ неизвѣстныхъ вопроса, послѣднее уравненіе придется разрѣшать попытками; не трудно однако убѣдиться на частныхъ примѣрахъ, что въ случаяхъ, встрѣчающихся въ приложеніяхъ, послѣднее уравненіе, даже при весьма большихъ значеніяхъ для отношенія $\frac{x}{d}$, будетъ доставлять для ε небольшую дробь; поэтому всегда возможно получить достаточно точное для практики рѣшеніе вопроса, разложивъ lognat$(1 - \varepsilon)$ въ рядъ по возрастающимъ степенямъ ε и удержавъ только нѣсколько первыхъ членовъ разложенія.

Такъ напримѣръ, ограничиваясь первыми двумя членами разложенія, получимъ

$$0{,}075\,\frac{x}{d} = \left(\frac{574{,}2774}{\Delta} \times \frac{273 + t_0}{V_0^2} + 0{,}29\right)\varepsilon - 1{,}709\,(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2),$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{0{,}00013\,\Delta\,\frac{x}{d} \cdot \frac{V_0^2}{273 + t_0}}{1 - 0{,}0025\,\Delta\,\frac{V_0^2}{273 + t_0}(1 + 0{,}6\,\varepsilon)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

Слѣдовательно, для перваго приближенія можно принять

$$\varepsilon = 0{,}00013\,\Delta\,\frac{x}{d} \cdot \frac{V_0^2}{273 + t_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

*) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Band IV.

Когда такимъ образомъ будетъ найдено достаточно точное значеніе количества ε, для опредѣленія скорости V въ сѣченіи, удаленномъ отъ начальнаго на разстояніи x, будемъ имѣть

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (j)$$

а для температуры t, изъ уравненія (b), получимъ

$$t = t_0 - 0{,}0005063\,\Delta\,\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,V_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Затѣмъ, при помощи перваго уравненія группы (a), найдемъ

$$\frac{V}{V_0} = \frac{v}{v_0}, \text{ т.-е. } v = v_0 \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

и наконецъ для давленія p получимъ

$$p = \frac{29{,}272}{\Delta} \cdot \frac{273+t}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Примѣръ. Атмосферный воздухъ движется въ трубѣ, длина которой въ 5000 разъ болѣе діаметра, причемъ скорость въ началѣ трубы равна 10 метрамъ, а температура въ начальномъ же сѣченіи равна 10° С.

Въ такомъ случаѣ должно принять

$$\frac{x}{d} = 5000, \quad V_0 = 10, \quad t_0 = 10 \text{ и } \Delta = 1;$$

поэтому уравненіе (g) доставитъ

$$375 = 1625{,}\,495\,\varepsilon + 1{,}709\,\mathrm{lognat}\,(1-\varepsilon).$$

Рѣшая это уравненіе попытками, найдемъ, что при

$$\varepsilon = 0{,}2309$$

вторая часть его обращается въ 374,78, а при

$$\varepsilon = 0{,}2310$$

— въ 375,04; слѣдовательно, искомая величина количества ε лежитъ между 0,2309 и 0,2310, такъ что принявъ ε равнымъ одному изъ этихъ чиселъ, мы сдѣлаемъ погрѣшность менѣе одной десятитысячной доли единицы. Принимая $\varepsilon = 0,2310$, такъ какъ это число удовлетворяетъ уравненію съ меньшею погрѣшностью, нежели число 0,2309, найдемъ

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 10 \times 1,1403 = 11,403 \text{ метр.}$$

$$t = 10 - 0,0005063 \frac{231}{769} \times 100 = 9,9848 \text{ градус.}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} \cdot \frac{a+t}{a+t_0} = \frac{v_0}{v} \cdot \frac{282,9848}{283} = 0,99994 \frac{v_0}{v},$$

а такъ какъ $\quad \dfrac{v_0}{v} = \dfrac{V_0}{V} = \sqrt{1-\varepsilon} = 0,88,$

поэтому $\quad \dfrac{p}{p_0} = 0,88,$

откуда $\quad \dfrac{p_0 - p}{p} = \dfrac{12}{88} = 0,14.$

Слѣдовательно, еслибы давленіе въ послѣднемъ сѣченіи трубы было атмосферное, то давленіе въ началѣ трубы должно было бы превосходить атмосферное давленіе на 0,14 сего послѣдняго, что соотвѣтствовало бы столбу воды высотою въ $10,334 \times 0,14$ метр., т.-е. въ 1,45 метр. При такомъ напорѣ и при длинѣ трубы, въ 5000 разъ большей діаметра, вода имѣла бы въ ней скорость $u = 0,34$ метр., какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ формулы [см. стран. 159, выраж. (70)]

$$\frac{A}{q} i = bu^2,$$

въ которой

$$\frac{A}{q} = \frac{d}{4}, \quad i = \frac{1,45}{x}, \quad \frac{x}{d} = 5000 \quad \text{и} \quad b = 0,000625.$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ, скорость воздуха въ трубѣ почти въ 30 разъ болѣе скорости, какую имѣла бы вода двигаясь въ этой же трубѣ при томъ же напорѣ.

Замѣтимъ, что еслибы рѣшеніе настоящаго численнаго примѣра мы начали съ приближеннаго уравненія (i), то нашли бы

$$\varepsilon = 0,230, \quad \frac{V_0}{V} = 0,877$$

и затѣмъ для остальныхъ количествъ t и p получили бы числа, весьма мало отличающіяся отъ выше найденныхъ.

На многихъ численныхъ примѣрахъ, подобныхъ выше приведенному, можно убѣдиться, что при движеніи газообразныхъ жидкостей въ трубахъ, окруженныхъ не проводниками теплоты, обнаруживаются слѣдующія обстоятельства, на которыя полезно обратить вниманіе:

1) Скорость движенія, по мѣрѣ приближенія къ оконечности трубы, возрастаетъ, а плотность газа въ той же пропорціи уменьшается; слѣдовательно, происходитъ расширеніе газообразной жидкости, при которомъ однако температура остается почти постоянною, а потому расширеніе это совершается почти по закону Маріота. Понятно, что это обстоятельство должно приписать нагрѣванію, производимому дѣйствіемъ тренія.

2) При небольшихъ скоростяхъ движенія газообразнои жидкости въ трубѣ, напримѣръ, при скоростяхъ, близкихъ къ той, съ какою обыкновенно движется вода въ водопроводахъ, уменьшеніе давленія, по мѣрѣ приближенія къ оконечности трубы, будетъ совершаться весьма медленно, такъ что нужна весьма значительной длины труба для того, чтобы въ концѣ ея получилось давленіе на чувствительную величину, меньшее давленія въ начальномъ сѣченіи. Такимъ образомъ можно, напримѣръ, передать давленіе сжатаго воздуха, при помощи трубы, на весьма большое разстояніе съ незначитеньнымъ уменьшеніемъ этого давленія, если только придать трубѣ такой діаметръ, чтобы скорость движенія въ ней воздуха была невелика. Этимъ обстоятельствомъ пользуются въ практикѣ при пробивкѣ туннелей, доставляя пріемнику, дѣйствующему сжатымъ воздухомъ, сгущенный воздухъ на протяженіи иногда въ нѣсколько тысячъ метровъ, безъ значительнаго уменьшенія давленія.

3) При сколько нибудь значительной разности давленій на оконечностяхъ газопровода, хотя бы длина его была и значительна, газообразная жидкость будетъ двигаться въ немъ съ значительною скоростью (какъ мы видѣли выше, на частномъ примѣрѣ, со скоростью въ 30 разъ большею скорости воды). Такимъ токомъ быстро движущейся газообразной жидкости

пользуются въ практикѣ при очищеніи трубъ отъ постороннихъ тѣлъ или осадковъ, накопляющихся въ нихъ во время движенія капельныхъ жидкостей, пуская въ нихъ, вмѣстѣ съ небольшимъ количествомъ сихъ послѣднихъ жидкостей, струю воздуха. Такой способъ очищенія трубъ называется *продуваніемъ*.

Разсмотрѣнный выше случай движенія газообразной жидкости въ трубѣ, стѣнки которой не пропускаютъ теплоты, мы заключимъ замѣчаніемъ, касающимся уравненія (g). Внимательное разсмотрѣніе этого уравненія показываетъ, что оно даетъ два вещественныхъ значенія для ε и притомъ оба меньшія единицы. Приближенное значеніе одного изъ этихъ корней дается выраженіемъ (i), а приближенное значеніе другого корня можно найти слѣдующимъ образомъ:

Примемъ $\varepsilon = 1 - \frac{1}{z}$; тогда уравненіе ($g$) можно будетъ представить въ видѣ

$$0{,}075\,\frac{x}{d} = \left(\frac{574{,}2774}{\Delta} \times \frac{273 + t_0}{V_0^2} + 0{,}29\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) -$$

$$- 1{,}709\,\mathrm{lognat}(z).$$

Такъ какъ оказывается, что второй корень уравненія чрезвычайно близокъ къ единицѣ, то z будетъ весьма большое число; поэтому дробью $\frac{1}{z}$ можно пренебречь предъ единицею, и тогда послѣднее уравненіе доставитъ

$$z = e^k,$$

гдѣ $$1{,}709\,k = \frac{574{,}2774}{\Delta}\ \frac{273 + t_0}{V_0^2} + 0{,}29 - 0{,}075\,\frac{x}{d}.$$

Такъ, напримѣръ, въ предъидущемъ частномъ примѣрѣ, когда

$$t_0 = 10, \quad V_0 = 10 \ \text{ и } \ \frac{x}{d} = 5000,$$

получается

$$z = e^{731{,}71} = 10^{317{,}77},$$

а слѣдовательно, второй корень уравненія весьма близокъ къ $1 - \frac{1}{10^{317,77}}$. Соотвѣтствующая же этому второму корню скорость V въ послѣднемъ сѣченіи будетъ равна $V_0 \,.\, 10^{153,88}$ т.-е. равна $10^{159,88}$ метровъ. Понятно, что такая скорость въ практическомъ смыслѣ ничѣмъ не отличается отъ безконечно большой, а между тѣмъ, аналитически она является какъ возможная, такъ какъ ничѣмъ не указывается, который изъ корней уравненія идетъ въ дѣло. Существованіе такого рѣшенія, несообразнаго съ дѣйствительностью, должно приписать тому обстоятельству, что при выводѣ уравненія (g) мы пользовались нѣкоторыми эмпирическими данными; такъ напримѣръ, взятое нами выраженіе для высоты, потерянной на треніе, а также и характеристическое уравненіе газа

$$pv = R(a + t)$$

получены на основаніи опытныхъ данныхъ; поэтому выраженія эти могутъ соотвѣтствовать дѣйствительнымъ явленіямъ, даже съ большею степенью точности, но въ предѣлахъ опыта, внѣ же этихъ предѣловъ могутъ приводить къ невѣрнымъ заключеніямъ. Болѣе чѣмъ вѣроятно, что выраженіе

$$4b\,\frac{dx}{d}\,V^2$$

внѣ предѣловъ опыта далеко не представляетъ высоты, затрачиваемой на треніе, поэтому и уравненіе (g) не можетъ служить для вывода изъ него какихъ либо заключеній въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшеніе его приводитъ къ данностямъ, далеко выходящимъ за предѣлы опытовъ. Это замѣчаніе полезно имѣть въ виду при приложеніяхъ какихъ бы то ни было формулъ, выведенныхъ при помощи эмпирическихъ законовъ и данныхъ.

99. Формула (i) предъидущаго № можетъ быть примѣнена къ опредѣленію діаметра трубы по данному расходу газа или воздуха, движущагося въ этой трубѣ, при данной разности давленій на оконечностяхъ.

Положимъ напримѣръ, что желаемъ опредѣлить діаметръ трубы, доставляющей свѣтильный газъ данному числу n горѣлокъ.

Считая по 5,5 кубич. футовъ, т.-е. по 0,1557 кубич. метровъ газа въ часъ на каждую горѣлку, получимъ для расхода газа въ $1''$:

$$Q = \frac{0{,}1557}{3600} n = 0{,}0000432\, n \text{ куб. метровъ.}$$

Затѣмъ имѣя въ виду, что вслѣдствіе незначительной разницы въ давленіяхъ въ крайнихъ сѣченіяхъ трубы, скорость движенія газа можно принимать за постоянную, получимъ

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot V_0 = 0{,}0000432\, n \quad \text{или} \quad V_0 = \frac{0{,}00005\, n}{d^2};$$

поэтому формула (i) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\varepsilon = \frac{13 \times 55^2}{10^{17}} \Delta \frac{x}{d^5} \cdot \frac{n^2}{273 + t_0}.$$

Принимая же за среднюю температуру газа 12^0 и внося вмѣсто Δ число 0,42, такъ какъ плотность свѣтильнаго газа составляетъ только 0,42 плотности воздуха, получимъ

$$\varepsilon = \frac{57{,}952}{10^{17}} \cdot \frac{xn^2}{d^2}.$$

Но выше мы имѣли

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = \frac{V_0}{V} = \frac{v_0}{v} = \frac{p}{p_0}$$

откуда $$\frac{p_0}{p} = (1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

и такъ какъ теперь ε весьма малая дробь, то можно принять

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{p_0 - p}{p} = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{28{,}976}{10^{17}} \cdot \frac{xn^2}{d^5}.$$

Наконецъ, принимая давленіе p на оконечности газопровода равнымъ атмосферному и обозначая разность $p_0 - p$ давленій, измѣренную высотою водяного столба, чрезъ h, получимъ

$$\frac{p_0 - p}{p} = \frac{h}{1033{,}4},$$

гдѣ h выражено въ сантиметрахъ. Слѣдовательно, окончательно будемъ имѣть формулу

$$d = \frac{1}{319{,}697} \sqrt[5]{\frac{xn^2}{h}} \text{ метровъ.}$$

По сличеніи результатовъ, доставляемыхъ этою формулою, съ размѣрами газопроводныхъ трубъ, дѣйствительно встрѣчающихся въ практикѣ, оказывается, что вмѣсто числа 319,697 можно взять число 340, такъ что формула, болѣе согласная съ дѣйствительностью, будетъ

$$d = \frac{1}{340} \sqrt[5]{\frac{xn^2}{h}} \text{ метровъ.}$$

гдѣ x есть длина трубы въ метрахъ, h — разность давленій въ сантиметрахъ водяного столба и n число горѣлокъ.

100. *Случай 2-й.* Газообразная жидкость движется въ трубѣ съ постояннымъ діаметромъ, стѣнки которой позволяютъ теплотѣ газа сообщаться съ теплотою внѣшняго пространства, такъ что движеніе его происходитъ или подъ вліяніемъ нагрѣванія извнѣ, или же при существованіи охлажденія, то-есть потери теплоты во внѣшнее пространство.

Въ настоящемъ случаѣ рѣшеніе вопроса должно искать изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} FV &= Gv \\ pv &= R(a+t) \\ \frac{\gamma\pi d}{AG}(T-t)\,dx + 4b\frac{V^2}{d}\,dx &= \frac{Rdt}{k-1} + pdv \\ \frac{V\partial V}{g} + \frac{kR}{k-1}\partial t &= \frac{\gamma\pi d}{AG}(T-t)\,dx - dz, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

въ которыхъ T обозначаетъ температуру внѣшняго пространства въ томъ мѣстѣ, гдѣ лежитъ сѣченіе трубы, находящееся на разстояніи x отъ начальнаго, а t — температуру движущагося въ трубѣ газа въ упомянутомъ сѣченіи; слѣдовательно, если $T-t$ будетъ болѣе нуля, то въ указанномъ сѣченіи газъ будетъ получать теплоту изъ внѣшняго пространства и, обратно, онъ будетъ отдавать теплоту, если $T-t$ будетъ менѣе нуля.

Примемъ $T-t=\tau$ и, разсматривая τ какъ функцію длины x, опредѣляющей положеніе сѣченія, положимъ, что

$$\int_0^x \tau\, dz = X,$$

гдѣ слѣдовательно X будетъ также нѣкоторою функціею x; тогда, интегрируя послѣднее уравненіе предъидущей группы, получимъ

$$\frac{V^2-V_0^2}{2g}+\frac{kR}{k-1}(t-t_0)=\frac{\gamma\pi d}{AG}X-(z-z_0),$$

откуда

$$t-t_0=\frac{k-1}{kR}\left(\frac{\gamma\pi d}{AG}X-z+z_0+\frac{V_0^2-V^2}{2g}\right)\ .\ \ .\ \ .\ \ (b)$$

Предпослѣднее же уравненіе группы (a), по замѣненіи въ немъ pdv равною ему величиною

$$R(a+t)\frac{\partial V}{V},$$

принимаетъ видъ

$$\frac{\gamma\pi d}{AG}\tau\, dx+\frac{4b}{d}V^2 dx=\frac{R}{k-1}\partial t+R(a-t)\frac{\partial V}{V},$$

откуда, исключая t и ∂t, при помощи уравненія (b), получимъ

$$\left(2g\frac{\gamma\pi d\tau}{AG}+8g\frac{k}{k-1}\cdot\frac{b}{d}V^2\right)dx=\frac{\partial V}{V}\left(2g\frac{k}{k-1}R(a+t_0)+\right.$$

$$\left.+V_0^2-2g(z-z_0)+2g\frac{\gamma\pi d}{AG}X-\frac{k+1}{k-1}V^2\right),$$

или, принимая для краткости письма

$$2g\frac{\gamma\pi d}{AG}=m,$$

$$8g\frac{k}{k-1}\cdot\frac{b}{d}=n,$$

$$2g\frac{k}{k-1}R(a+t_0)+V_0^2=r \quad \text{и}$$

$$\frac{k+1}{k-1}=s,$$

будемъ имѣть

$$(m\tau + nV^2)\,\partial x = \frac{\partial V}{V}[r + mX - 2g(z - z_0) - sV^2]. \quad . \quad (c)$$

гдѣ z, τ и X суть нѣкоторыя функціи отъ x, а m, n, r и s постоянные коэффиціенты.

Изъ числа немногихъ случаевъ, въ которыхъ возможно интегрированіе послѣдняго уравненія, мы разсмотримъ только два соотвѣтствующихъ слѣдующимъ предположеніямъ:

1) количество $\tau = T - t$ есть величина постоянная, не зависящая отъ x, и

2) длина трубы не велика, такъ что треніемъ въ ней газа можно пренебречь (т.-е. можно принять $n = 0$) и въ то же время скорость движенія въ ней газа такъ мала, что можно пренебрегать членомъ sV^2 предъ r.

Первое предположеніе. Количество $\tau = T - t$ есть величина постоянная. Въ этомъ случаѣ должно принять

$$X = \int_0^x \tau \,.\, \partial x = \tau x;$$

если же сверхъ того предположимъ, что всѣ элементы оси трубы наклонены къ горизонту подъ одинаковымъ угломъ α, то будемъ имѣть

$$z - z_0 = x \sin\alpha$$

и уравненіе (c) приметъ видъ

$$(m\tau + nV^2)\,V\partial x = [r + (m\tau - 2g\sin\alpha)\,x - sV^2]\,\partial V. \quad . \quad (d)$$

откуда получимъ

$$(m\tau - 2g\sin\alpha)\,x = (m\tau + nV^2)\,Vx' - r + sV^2,$$

гдѣ

$$x' = \frac{\partial x}{\partial V};$$

дифференцируя же послѣднее уравненіе, найдемъ

$$(m\tau - 2g\sin\alpha)\,x'\partial V = (m\tau + 3nV^2)\,x'\partial V + (m\tau + nV^2)\,V\partial x' + \\ + 2sV\partial V$$

или

$$\partial x' + \frac{3nV^2 + 2g\sin\alpha}{(m\tau + nV^2)V} x'\partial V + 2s\frac{\partial V}{m\tau + nV^2} = 0.$$

Это послѣднее уравненіе есть уравненіе Бернулли, поэтому интегралъ его будетъ

$$x' = \left(C - 2s\int\frac{e^k}{m\tau + nV^2}\partial V\right)e^{-k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(e)}$$

гдѣ

$$k = \int\frac{3nV^2 + 2g\sin\alpha}{(m\tau + nV^2)V}\partial V.$$

Но по извѣстнымъ правиламъ для разложенія раціональныхъ дробей на частныя дроби, получаемъ

$$\frac{3nV^2 + 2g\sin\alpha}{(m\tau + nV^2)V} = \frac{1}{m\tau}\left(\frac{2g\sin\alpha}{V} + \frac{(3m\tau - 2g\sin\alpha)nV}{m\tau + nV^2}\right);$$

поэтому,

$$k = \frac{2g\sin\alpha}{m\tau}\log V + \frac{3m\tau - 2g\sin\alpha}{2m\tau}\log(m\tau + nV^2)$$

или

$$k = \log\left[V^{\frac{2g\sin\alpha}{m\tau}} \times (m\tau + uV^2)^{\frac{3m\tau - 2g\sin\alpha}{2m\tau}}\right],$$

а потому

$$e^k = V^{\frac{2g\sin\alpha}{m\tau}} \times (m\tau + nV^2)^{\frac{3m\tau - 2g\sin\alpha}{2m\tau}};$$

слѣдовательно,

$$x' = \frac{C - 2s\int V^{\frac{2g\sin\alpha}{m}} \times (m\tau + nV^2)^{\frac{m\tau - 2g\sin\alpha}{2m\tau}} \times \partial V}{V^{\frac{2g\sin\alpha}{m\tau}} \times (m\tau + nV^2)^{\frac{3m\tau - 2g\sin\alpha}{2m\tau}}} \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

а такъ какъ изъ уравненія (d) имѣемъ

$$x' = \frac{(m\tau - 2g\sin\alpha)x + r - sV^2}{(m\tau + nV^2)V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(g)}$$

то приравнивая между собою вторыя части уравненій (f) и (g) мы и получимъ интегралъ уравненія (c), приведенный къ квадратурѣ.

Интегралъ, входящій въ числитель второй части уравненія

(f), для случая горизонтальной трубы, для которой $\sin\alpha = 0$, обращается въ

$$\int \sqrt{m\tau + nV^2}\,.\,\partial V = \tfrac{1}{2} V \sqrt{m\tau + nV^2} + \frac{m\tau}{2\sqrt{n}} \log\left(V\sqrt{n} + \sqrt{m\tau + nV^2}\right),$$

поэтому *для случая горизонтальной трубы* имѣемъ

$$(m\tau + r)\frac{\sqrt{m\tau + nV^2}}{V} + \frac{m\tau s}{\sqrt{n}} \log\left(V\sqrt{n} + \sqrt{m\tau + nV^2}\right) = C.$$

Обозначая же чрезъ V_0 начальную скорость и чрезъ L полную длину трубы, получимъ

$$\left.\begin{aligned} &(m\tau L + r)\frac{\sqrt{m\tau + V^2}}{V} - r\,\frac{\sqrt{m\tau + nV_0^2}}{V_0} = \\ &= \frac{m\tau s}{\sqrt{n}} \log\left(\frac{V_0\sqrt{n} + \sqrt{m\tau + nV_0^2}}{V\sqrt{n} + \sqrt{m\tau + nV^2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

Изъ этого уравненія возможно будетъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, опредѣлить V попытками.

Въ случаѣ, когда труба не горизонтальна, точное опредѣленіе интеграла, входящаго въ уравненіе (f), возможно будетъ только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ для показателей; вообще же интегралъ этотъ нужно будетъ искать по приближенію. Относительно этого интеграла полезно однако замѣтить, что онъ сопровождается коэффиціентомъ s, этотъ же коэффиціентъ въ дифференціальномъ уравненіи (d) входитъ только въ одномъ членѣ sV^2, которымъ, въ случаяхъ, имѣющихъ практическую важность, всегда можно пренебречь предъ r; поэтому въ уравненіяхъ (f) и (g) можно отбросить члены, сопровождающіеся этимъ коэффиціентомъ, и тогда получимъ

$$C = [(m\tau - 2g\sin\alpha)\,x + r] \times \left(\frac{\sqrt{m\tau + nV^2}}{V}\right)^{\frac{m\tau - 2g\sin\alpha}{m\tau}}.$$

Обозначая, какъ и выше, чрезъ V_0 скорость въ начальномъ сѣченіи, чрезъ L полную длину трубы и чрезъ H возвышеніе послѣдняго сѣченія надъ первымъ, получимъ

$$\left(1 + \frac{m\tau L - 2gH}{r}\right) \times \left(\frac{V_0}{V}\sqrt{\frac{m\tau + nV^2}{m\tau + nV_0^2}}\right)^{\frac{m\tau L - 2gH}{m\tau L}} = 1$$

или

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \times \left(\frac{m\tau + nV_0^2}{m\tau + nV^2}\right) = \left(1 + \frac{m\tau L - 2gH}{r}\right)^{\frac{m\tau L - 2gH}{2m\tau L}} \quad . \; . \quad \text{(i)}$$

Въ случаѣ же, когда количество $m\tau L - 2gH$ будетъ не велико въ сравненіи съ r, можно вторую часть послѣдняго уравненія разложить въ рядъ и ограничиться первыми двумя членами разложенія, и тогда получимъ

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \times \frac{m\tau + nV_0^2}{m\tau + nV^2} = 1 + \frac{2m\tau L}{r}$$

и

$$V^2 = V_0^2 \frac{1 + \frac{2m\tau L}{r}}{1 - \frac{2nLV_0^2}{r}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(k)}$$

Второе предположеніе. Члены nV^2 и sV^2 въ уравненіи (c) могутъ быть отброшены. При такомъ предположеніи уравненіе это принимаетъ видъ

$$Vm\tau\, dx = \partial V\,[r + mX - 2g\,(z - z_0)]$$

и такъ какъ въ немъ перемѣнныя прямо отдѣляются, то получаемъ

$$\log V = \int \frac{m\tau dx}{r + mX - 2g\,(z - z_0)} + C.$$

Если же примемъ, какъ и выше, $z - z_0 = x \sin\alpha$, а вмѣсто τ внесемъ его величину $\frac{\partial X}{\partial x}$, то получимъ

$$\log V = \int \frac{m\frac{\partial X}{\partial x}\,dx}{r + mX - 2gx\sin\alpha} + C = \log(r + mX - 2gx\sin\alpha) +$$
$$+ \int \frac{2g\sin\alpha \,.\, dx}{r + mX - 2gx\sin\alpha} + C,$$

или окончательно,

$$\log\left(\frac{V}{r + mX - 2gx\sin\alpha}\right) = 2g\sin\alpha \int \frac{dx}{r + mX - 2gx\sin\alpha} + C. \quad \text{(l)}$$

Вторую часть послѣдняго уравненія можно будетъ интегрировать въ различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно вида зависимости X или τ отъ x.

Выведенныя въ настоящемъ нумерѣ формулы для движенія газовъ въ трубахъ могутъ служить при рѣшеніи вопросовъ, касающихся тяги дымовыхъ трубъ, доставленія воздуха въ доменныя печи при нагрѣтомъ и холодномъ дутьѣ и т. п.

Взаимное давленіе газообразной жидкости и твердаго тѣла при относительномъ ихъ движеніи.

101. Статью о движеніи газообразныхъ жидкостей мы заключимъ нѣкоторыми замѣчаніями относительно взаимнаго давленія газообразной жидкости и твердаго тѣла, при существованіи относительнаго ихъ движенія.

Формулы, выведенныя выше (№ 76 и слѣд.) для подобнаго же давленія въ случаѣ капельныхъ жидкостей, примѣняются и къ случаю газообразной жидкости, но степень точности этихъ формулъ въ этомъ послѣднемъ случаѣ будетъ еще меньшая, нежели въ случаѣ капельныхъ жидкостей. Дѣйствительно, въ случаѣ газообразной жидкости, къ тѣмъ неточностямъ, какія происходятъ отъ незнанія истинныхъ значеній относительныхъ скоростей, присоединяются еще неточности отъ невозможности опредѣлить измѣненія плотности, производимыя твердымъ тѣломъ въ массѣ соприкасающейся къ нему, во время движенія, газообразной жидкости. Измѣненія же плотности, въ случаѣ когда относительныя скорости значительны, могутъ быть весьма чувствительны, а потому и выводы, получающіеся изъ указанныхъ формулъ, могутъ значительно уклоняться отъ истинныхъ, въ особенности тогда, когда относительныя скорости частицъ газообразной жидкости будутъ велики.

Пусть A представляетъ площадь плоской поверхности твердаго тѣла, остающагося неподвижнымъ въ неопредѣленной массѣ газообразной жидкости, движущейся со скоростью V по направленію, перпендикулярному къ плоскости A. Давленіе P жидкости на это тѣло, согласно выше сказанному, опредѣлится формулою

$$P = k\Delta A \frac{V^2}{2g} \text{ килограм.} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

въ которой Δ представляетъ вѣсъ въ килограммахъ одного кубическаго метра жидкости.

Для случая атмосфернаго воздуха, для котораго Δ среднимъ числомъ въ 800 разъ меньше, нежели для воды, коэффиціентъ k, какъ это оказалось изъ опытовъ *Смеатона*, а также и изъ опытовъ *Тибо*, о которыхъ говоритъ Моренъ въ своихъ Notions fondamentales de Mecanique, равняется 1,825. Слѣдовательно, коэффиціентъ этотъ весьма близокъ къ тому, какой найденъ былъ Дюбуа (см. № 79) для случая пластинки, погруженной въ движущуюся воду.

Принимая въ предъидущей формулѣ

$$k=1{,}825,\quad \Delta=\frac{1000}{800}=1{,}25 \text{ килогр. и } 2g=19{,}62,$$

получимъ
$$P=0{,}1163\,AV^2 \text{ килогр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1 \text{ bis})$$

Въ формулѣ этой V представляетъ нормальную относительную скорость воздуха; поэтому въ случаѣ, когда относительная скорость не будетъ перпендикулярна къ той плоскости, давленіе на которую опредѣляемъ, нужно будетъ вмѣсто V внести въ формулу проекцію V на нормаль къ плоскости. Слѣдовательно, если α будетъ обозначать уголъ, образуемый направленіемъ относительной скорости V съ плоскостью, то послѣднюю формулу должно писать въ видѣ

$$P=0{,}1163\,AV^2\,.\sin^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Въ случаяхъ, когда уголъ α не великъ, формула эта довольно сильно уклоняется отъ дѣйствительности и требуетъ исправленія практическимъ коэффиціентомъ, величина котораго зависитъ отъ угла α. Слѣдуя Брессу *), вмѣсто формулы (2) лучше пользоваться формулою

$$P=0{,}1163\,\frac{2{,}8-1{,}8\sin^2\alpha}{2-\sin^2\alpha}\,AV^2\sin^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и тогда будутъ получаться результаты, болѣе согласные съ опытами *Гюттона*, предложившаго формулу

$$P=k\Delta A\,\frac{V^2}{2g}\cdot\sin^n(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

въ которой $n=1{,}84\cos\alpha$, но которою рѣдко пользуются, такъ какъ она крайне неудобна для вычисленій.

---

*) Hydraulique, 1860, p. 334.

ГИДРАВЛИЧЕСКІЕ ПРІЕМНИКИ.

Общія понятія о дѣйствіи гидравлическихъ пріемниковъ и ихъ подраздѣленіе. Способы образованія напора.

102. Гидравлическими пріемниками называются машины-двигатели, приводимыя въ движеніе дѣйствіемъ, на извѣстные ихъ органы, частицъ движущейся жидкости.

Сообразно роду дѣйствующей жидкости, гидравлическіе пріемники подраздѣляются на *пріемники воды* и *пріемники вѣтра* или *воздуха*.

Для дѣйствія гидравлическаго пріемника необходимо, чтобы жидкость или находилась въ состояніи движенія, т.-е. обладала извѣстнымъ запасомъ работы, существующемъ въ ней въ видѣ живой силы, иначе говоря, въ видѣ *дѣйствительной энергіи*, или же необходимо, чтобы запасъ работы существовалъ въ видѣ *энергіи потенціальной*, т.-е. способной, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, заставить частицы жидкости двигаться, слѣдовательно, способной преобразоваться въ живую силу.

Вода, движущаяся въ каналѣ или рѣкѣ, или же падающая съ высоты, воздухъ, движущійся во время вѣтра—обладаютъ извѣстною *дѣйствительною энергіею*, т.-е. запасомъ работы въ видѣ живой силы, которымъ и можно пользоваться для приведенія въ движеніе гидравлическаго пріемника и побѣжденія тѣхъ сопротивленій, какія будетъ встрѣчать этотъ пріемникъ при своемъ движеніи. Вода, собранная въ какомъ-либо резервуарѣ и наполняющая его до уровня, расположеннаго выше уровня воды, окружающей этотъ резервуаръ, воздухъ, заключенный въ какомъ-либо сосудѣ и сжатый до давленія, бо̀льшаго давленія воздуха, окружающаго сосудъ, обладаютъ запасомъ работы въ видѣ *потенціальной энергіи*, которымъ также можно воспользоваться для сообщенія движенія пріемнику.

Понятно, что если для образованія такого запаса работы, какой необходимъ для дѣйствія пріемника, мы сами должны будемъ затрачивать работу, напримѣръ поднимать воду на высоту или же сжимать воздухъ, то въ такомъ случаѣ пользованіе гидравлическими пріемниками будетъ невыгоднымъ и можетъ найти оправданіе только при нѣкоторыхъ исключительныхъ обстоятельствахъ; напротивъ того, если подобный запасъ работы накопляется въ массѣ жидкости вслѣдствіе нѣкоторыхъ процессовъ, совершающихся въ природѣ, безъ всякой постоянной затраты съ нашей стороны работы, то пользованіе гидравлическими пріемниками является несравненно болѣе выгоднымъ, нежели пользованіе, напримѣръ, пріемниками живыхъ двигателей или же термическими машинами, требующими топлива.

Безпрерывно совершающійся въ природѣ процесъ, при которомъ накопляется въ массѣ жидкости, находящейся на земной поверхности, извѣстный запасъ работы, состоитъ въ нагрѣваніи лучами солнца поверхности земли. Происходящее при этомъ нагрѣваніи неравномѣрное распредѣленіе температуры въ массѣ воздуха производитъ вѣтеръ, которымъ и пользуются для движенія пріемниковъ, называемыхъ *вѣтряными мельницами*; дѣйствіемъ же этого нагрѣванія поднимается огромное количество воды въ видѣ паровъ на значительную высоту, откуда вода обратно падаетъ на землю въ видѣ дождя, снѣга и т. п., и такимъ образомъ образуетъ на земной поверхности ручья, рѣки и проч., движеніемъ воды въ которыхъ пользуются для дѣйствія *пріемниковъ воды*.

Кромѣ нагрѣванія лучами солнца поверхности земли, существуетъ еще одна причина, заставляющая огромныя массы жидкости, покрывающей землю, безпрестанно перемѣщаться,—это притяженіе ихъ къ землѣ и къ ближайшему небесному тѣлу, лунѣ. Притяженіе это, вслѣдствіе вращательнаго движенія земли около своей оси, производитъ перемѣщенія большихъ массъ воды, называемыя *морскими приливами* и *отливами* и аналогичныя имъ перемѣщенія массъ воздуха. При помощи нѣкоторыхъ приспособленій, въ приморскихъ мѣстностяхъ, въ которыхъ повышенія и пониженія уровня моря, во время приливовъ и отливовъ, бываютъ довольно значительны, пользуются этими измѣненіями уровня для приведенія въ движеніе пріемниковъ воды.

103. Гидравлическіе пріемники, сообразно виду ихъ движенія, могутъ быть подраздѣлены на два рода: на пріемники *съ круговымъ непрерывнымъ движеніемъ* и на пріемники *съ движеніемъ прямолинейнымъ возвратнымъ*.

Пріемники воды, имѣющіе непрерывное круговое движеніе, называются или *водяными колесами*, или же *тюрбинами*, а пріемники воздуха съ такимъ же движеніемъ—*вѣтряными мельницами;* пріемники же воды съ прямолинейнымъ возвратнымъ движеніемъ носятъ названіе *водостолбовыхъ машинъ*, а пріемники воздуха съ прямолинейнымъ движеніемъ—это суть пріемники, дѣйствующіе *сжатымъ воздухомъ*.

Въ водостолбовыхъ машинахъ и въ пріемникахъ, дѣйствующихъ сжатымъ воздухомъ, движеніе производится давленіемъ жидкости на поршень, заключенный въ особомъ рабочемъ цилиндрѣ, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ каждой паровой машинѣ; поэтому правильное движеніе этихъ пріемниковъ есть движеніе *періодическое*, которое только съ грубою степенью приближенія можно принимать за равномѣрное; напротивъ того, правильное движеніе пріемниковъ перваго рода есть или движеніе дѣйствительно равномѣрное, или же хотя и періодическое, но съ такимъ краткимъ періодомъ, что движеніе это, безъ чувствительной погрѣшности, можно принимать за равномѣрное *). Вслѣдствіе этого послѣдняго обстоятельства теорія гидравлическихъ пріемниковъ перваго рода существенно отличается отъ теоріи пріемниковъ второго рода, такъ какъ при

*) Правильное движеніе, напримѣръ, водяного колеса есть движеніе періодическое, продолжительность періода котораго равна тому времени, какое нужно, чтобы лопатка колеса прошла путь равный разстоянію отъ одной лопатки до другой, съ нею смежной.

разсматриваніи движенія жидкости, притекающей къ пріемнику перваго рода или же вытекающей изъ этого пріемника, можно движеніе это принимать за установившееся и пользоваться теоремою Д. Бернулли (стр. 62), чего нельзя сдѣлать въ случаѣ пріемниковъ второго рода.

По способу подведенія жидкости къ пріемникамъ ихъ можно подраздѣлить на пріемники *съ опредѣленнымъ объемомъ дѣйствующей жидкости* и на пріемники *съ неопредѣленнымъ объемомъ* дѣйствующей жидкости. Къ пріемникамъ перваго рода жидкость подводится помощью трубъ или открытыхъ каналовъ, руслъ и т. п., причемъ количество притекающей, въ каждую единицу времени, жидкости можно измѣнять по произволу подниманіемъ и опусканіемъ *щита*, если таковой устроенъ; въ пріемникахъ же второго рода не имѣется никакихъ приспособленій, при помощи которыхъ возможно было бы подводить къ нимъ желаемое количество жидкости. Вѣтряныя мельницы и одинъ видъ колесъ, такъ-называемыя *висячія колеса,* суть пріемники второго рода, къ которымъ жидкость притекаетъ неопредѣленною массою, всѣ же прочіе пріемники принадлежатъ къ пріемникамъ перваго рода.

Пріемники съ круговымъ непрерывнымъ движеніемъ можно подраздѣлить на пріемники *съ горизонтальною осью* и на пріемники *съ вертикальною осью.* Такое подраздѣленіе для пріемниковъ вѣтра имѣетъ довольно существенное значеніе, такъ какъ пріемники вѣтра съ вертикальною осью могутъ дѣйствовать при всякомъ направленіи вѣтра, между тѣмъ какъ пріемники съ горизонтальною осью дѣйствуютъ тогда только, когда направленіе оси вращенія совпадаетъ съ направленіемъ вѣтра; слѣдовательно, эти послѣдніе пріемники должны быть снабжены приспособленіями, дозволяющими измѣнять положеніе ихъ оси сообразно направленію вѣтра.

Пріемники воды съ круговымъ непрерывнымъ движеніемъ подраздѣляются на *колеса* и *тюрбины.* Характеристическое отличіе колесъ отъ тюрбинъ состоитъ въ томъ, что въ колесахъ точки, въ которыхъ бываютъ частицы воды въ моментъ выхода ихъ изъ колеса, суть тѣ же самыя точки, чрезъ которыя онѣ проходятъ, вступая въ колесо, между тѣмъ какъ точки вступленія воды въ тюрбину и точки выхода ее изъ тюрбины суть различныя точки; такъ напримѣръ, вода вступаетъ въ колесо и сходитъ съ колеса всегда у его внѣшней окружности; въ тюрбинахъ же, если вода вступаетъ у внѣшней окружности, то сходитъ у внутренней, или обратно, или же вступаетъ въ верхней части тюрбины, а сходитъ въ нижней. Всѣ другіе признаки, на которые иногда указываютъ какъ на отличительные признаки колесъ отъ тюрбинъ, не принадлежатъ къ числу характеристическихъ. Такъ напримѣръ, колеса всегда имѣютъ горизонтальную ось, а тюрбины всего чаще бываютъ съ вертикальною осью; въ колесахъ вода дѣйствуетъ только на нѣкоторыя изъ его лопатокъ, въ каждое данное мгновеніе, въ тюрбинахъ же всего чаще вода дѣйствуетъ на всѣ лопатки вдругъ; но есть тюрбины, въ которыхъ, подобно тому какъ и въ колесахъ, вода дѣйствуетъ одновременно только на нѣсколько изъ ея лопатокъ.

Дальнѣйшее, болѣе подробное, подраздѣленіе пріемниковъ мы сдѣлаемъ впослѣдствіи, когда будемъ говорить о каждомъ изъ указанныхъ выше родовъ пріемниковъ, а теперь скажемъ нѣсколько словъ о способахъ образованія *напора*, необходимаго для дѣйствія пріемниковъ воды.

104. Во время дѣйствія пріемника воды, вода переливается изъ верхняго резарвуара въ нижній и на пути своемъ, встрѣчая извѣстные органы пріемника, производитъ на нихъ давленіе и такимъ образомъ сообщаетъ движеніе пріемнику. Вертикальное разстояніе уровней воды въ верхнемъ и въ нижнемъ резервуарахъ обыкновенно называютъ *напоромъ*. Только въ мѣстностяхъ гористыхъ, богатыхъ естественными водопадами, могутъ встрѣтиться напоры, достаточные для дѣйствія гидравлическихъ пріемниковъ; вообще же напоры эти приходится образовывать искуственнымъ образомъ. Лучшій и чаще встрѣчающійся способъ образованія напора состоитъ въ построеніи *плотины*, задерживающей движеніе воды въ ея естественномъ руслѣ. Слѣдствіемъ такого задержанія движенія бываетъ то, что дѣйствительная энергія воды, существовавшая въ видѣ живой силы, измѣняется въ энергію потенціальную, отчего уровень воды предъ плотиною возвышается, или, говоря иначе, та работа, которая во время движенія воды затрачивалась на раз-

личныя гидравлическія сопротивленія, обнаруживается въ поднятіи уровня воды, когда движеніе это дѣйствіемъ плотины уничтожается.

Когда построеніе плотины оказывается невозможнымъ, или по причинѣ громадности расхода воды въ рѣкѣ, или же потому, что только одинъ изъ береговъ рѣки принадлежитъ владѣльцу, желающему устроить гидравлическій пріемникъ, или, наконецъ, по причинѣ большой отлогости береговъ рѣки, требующихъ при построеніи плотины и построенія особыхъ береговыхъ возвышеній, а слѣдовательно и затраты несоразмѣрно большого капитала, тогда для образованія напора пользуются построеніемъ, такъ называемаго, *отводного канала.*

Отводный каналъ обыкновенно ведутъ параллельно рѣкѣ, придавая его дну уклонъ, значительно меньшій уклона рѣки, поэтому если часть воды будетъ отведена изъ рѣки въ каналъ, то по мѣрѣ движенія ея въ этомъ каналѣ уровень будетъ понижаться менѣе, нежели онъ понижается въ рѣкѣ, то-есть будетъ образовываться напоръ тѣмъ большій, чѣмъ длинѣе отводный каналъ. Такъ, напримѣръ, еслибы уклонъ рѣки былъ 0,001, а уклонъ канала былъ 0,0001, то на длинѣ рѣки въ 1000 метровъ уровень воды въ ней понижался бы на одинъ метръ, между тѣмъ какъ на такой же длинѣ канала пониженіе уровня было бы только въ 0,1 метра; слѣдовательно, при длинѣ канала въ 1000 метровъ, уровень воды въ его послѣднемъ сѣченіи былъ бы на 0,9 метра выше уровня въ соотвѣтствующемъ сѣченіи рѣки; при длинѣ канала въ 2000 метровъ получилась бы разность уровней, то-есть напоръ, въ 1,8 метровъ и т. д.

Гидравлическія колеса.

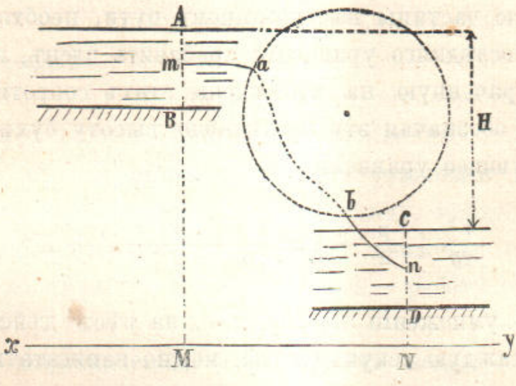
---

105. *Общее уравненіе движенія воды, дѣйствующей на гидравлическое колесо. Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія колеса.* Гидравлическія колеса суть пріемники, имѣющіе во время дѣйствія вращательное движеніе около горизонтальной оси. Каждое гидрав-

лическое колесо состоитъ изъ горизонтальнаго *вала*, одного или двухъ, а иногда даже и трехъ *ободьевъ*, скрѣпленныхъ съ валомъ при помощи *ручекъ* или *спицъ* и *лопатокъ*, укрѣпленныхъ въ ободьяхъ, представляющихъ плоскія или же кривыя поверхности, предназначаемыя для непосредственнаго принятія дѣйствія воды. Сверхъ того, каждое колесо (за исключеніемъ впрочемъ висячихъ колесъ) имѣетъ *русло*, служащее для подведенія къ нему воды и особое приспособленіе, называемое *щитомъ*, для регулированія количества притекающей воды.

Чтобы составить понятіе о дѣйствіи воды на колесо, разсмотримъ движеніе какой-либо частицы воды, переходящей изъ верхняго резервуара въ нижній и на пути своемъ встрѣчающей лопатку колеса.

Пусть напримѣръ $mabn$ (фиг. 1) будетъ траэкторія одной изъ частицъ воды. Точка m этой траэкторіи принадлежитъ поперечному



Фиг. 1.

ному сѣченію AB верхняго резервуара, а точка n — поперечному сѣченію CD нижняго. Предполагая, что колесо имѣетъ равномѣрное движеніе, нужно допустить, что обстоятельства движенія воды, вступающей на колесо и вытекающей изъ него, немѣняются съ теченіемъ времени, а слѣдовательно, положенія точекъ m и n траэкторіи частицы воды должны удовлетворять уравненію Д. Бернулли.

Пусть H обозначаетъ напоръ, то-есть разность уровней обоихъ резервуаровъ, p и p' — давленія на единицу площади въ точкахъ

m и n, V и V' — скорости частицы воды въ этихъ же точкахъ и h и h' — вертикальныя высоты точекъ m и n надъ нѣкоторою неизмѣнною горизонтальною плоскостью xy, то-есть $h = Mm$ и $h' = Nn$. Сверхъ того, пусть P обозначаетъ давленіе атмосферы, e и e' — глубины Am и Cn погруженія точекъ m и n подъ свободною поверхность воды въ резервуарахъ, а именно $e = Am$ и $e' = Cn$, Q — объемъ воды, дѣйствующей на колесо въ каждую секунду и Δ вѣсъ единицы объема воды.

При такомъ обозначеніи, еслибы частица воды на пути отъ m къ n не встрѣчала никакихъ сопротивленій, теорема Д. Бернулли доставила бы уравненіе

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + h = \frac{V'^2}{2g} + \frac{p'}{\Delta} + h';$$

въ дѣйствительности же, вслѣдствіе существованія сопротивленій движенію частицы на указанномъ пути, необходимо во второй части послѣдняго уравненія прибавить членъ, выражающій высоту, затраченную на побѣжденіе этихъ сопротивленій. Слѣдовательно, обозначая эту послѣднюю высоту буквою K, получаемъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + h = \frac{V'^2}{2g} + \frac{p'}{\Delta} + h' + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которое, по умноженіи на ΔQ, т.-е. на вѣсъ дѣйствующей на колесо въ каждую секунду воды, можно написать въ видѣ

$$\frac{\Delta Q}{2g}(V'^2 - V^2) = \left(\frac{p - p'}{\Delta} + h - h'\right)\Delta Q - \Delta Q K.$$

Но $\qquad p = P + \Delta e \quad$ и $\quad p' = P + \Delta e',$

если только предположимъ, что въ сѣченіяхъ AB и CD давленіе распредѣляется по законамъ гидростатики (предположеніе такое мы всегда имѣемъ право сдѣлать, такъ какъ выборъ положенія этихъ сѣченій зависитъ отъ нашего произвола, слѣдовательно можно избрать сѣченія AB и CD въ тѣхъ мѣстахъ резервуаровъ, въ которыхъ вода движется параллельными струйками (№ 26), или же гдѣ движенiе совершается со скоростями чрезвычайно малыми; поэтому

$$\frac{p-p'}{\Delta}=e-e' \quad \text{и} \quad \frac{p-p'}{\Delta}+h-h'=e+h-e'-h'=H;$$

слѣдовательно,

$$\frac{\Delta Q}{2g}(V'^2-V^2)=\Delta QH-\Delta QK.$$

Въ этомъ уравненiи H обозначаетъ разность уровней въ сѣченiяхъ AB и CD; если же пожелаемъ, чтобы H обозначало такъ-называемый напоръ, то нужно, чтобы сѣченiя AB и CD принадлежали тѣмъ мѣстамъ резервуаровъ, гдѣ вода находится въ покоѣ или же движется, но чрезвычайно медленно. Допуская это послѣднее предположенiе, должно принять

$$V=V'=0$$

и тогда получимъ

$$\Delta QK=\Delta QH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Понятно, что въ этомъ послѣднемъ уравненiи первая часть представляетъ работу, въ каждую секунду, всѣхъ тѣхъ сопротивленiй, какiя встрѣчаетъ вода при движенiи отъ верхняго резервуара до нижняго, а вторая часть — работу вѣса воды въ секунду же.

Работа сопротивленiй, встрѣчаемыхъ водою при переходѣ отъ верхняго резервуара къ нижнему, состоитъ, очевидно, изъ двухъ частей: изъ работы сопротивленiй, какiя представляетъ водѣ колесо, равной работѣ того усилiя, какое нужно приложить къ окружности колеса, чтобы поддерживать его равномѣрное движенiе, и изъ работы тѣхъ гидравлическихъ сопротивленiй, какiя обнаруживаются на разсматриваемомъ пути воды; поэтому, обозначая первую изъ этихъ частей, т.-е. работу усилiя, поддерживающаго равномѣрное движенiе колеса, чрезъ T, а работу гидравлическихъ сопротивленiй чрезъ t, получимъ

$$\Delta QK=T+t=\Delta QH,$$

откуда

$$\frac{T}{\Delta QH}=\frac{\Delta QH-t}{\Delta QH}=1-\frac{t}{\Delta QH}=\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Отношеніе η, такъ-называемой, *валовой работы* T колеса къ полной работѣ ΔQH вѣса воды, соотвѣствующей существующему напору H и расходу Q, называется *коэффиціентомъ дѣйствія колеса,* численная величина котораго всегда менѣе единицы, такъ какъ количество t мы никогда не можемъ обратить въ нуль. Понятно однако, что чѣмъ меньше будетъ это послѣднее количество, т.-е. чѣмъ ближе будетъ къ единицѣ коэффиціентъ η, тѣмъ совершеннѣе будетъ устройство колеса и относящихся къ нему приспособленій для подведенія и отведенія воды.

106. *Условія наивыгоднѣйшаго дѣйствія колеса.* Изъ всего выше сказаннаго не трудно усмотрѣть, что для полученія условій наивыгоднѣйшаго дѣйствія колеса, нужно опредѣлить, изъ какихъ частей состоитъ количество t и затѣмъ сообразить, что должно сдѣлать для того, чтобы каждая изъ этихъ частей была по возможности меньше.

На пути отъ верхняго резервуара до нижняго, вода встрѣчаетъ слѣдующія гидравлическія сопротивленія:

1) сопротивленіе во время прохожденія чрезъ щитовое отверстіе, происходящее отъ сжатія струи;

2) треніе о дно и стѣнки русла, ведущаго воду отъ щитового отверстія къ колесу;

3) сопротивленіе въ моментъ встрѣчи воды съ лопатками колеса, происходящее отъ удара ея о лопатку или о воду, раньше вошедшую въ колесо;

4) сопротивленіе отъ тренія воды о лопатки, въ случаѣ существованія относительнаго движенія воды по лопаткѣ

и 5) сопротивленіе, встрѣчаемое водою по выходѣ изъ колеса, во время движенія ея отъ сего послѣдняго до уровня нижняго резревуара.

Слѣдовательно, для полученія лучшаго дѣйствія колеса должно соблюсти слѣдующее:

1) щитовое отверстіе устраивать такъ, чтобы коэффиціентъ скорости, съ которою вода протекаетъ чрезъ это отверстіе, былъ

какъ можно ближе къ единицѣ, а сжатіе струи было бы по возможности меньшее; такъ напримѣръ, лучше устроивать отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, нежели въ толстой, и лучше ставить наклонный щитъ, нежели вертикальный.

2) русло, подводящее воду отъ щитового отверстія къ колесу, должно быть какъ можно короче и не должно имѣть изгибовъ, а также съуживаній и расширеній сѣченій. Скорость движенія воды по руслу не должна быть больше той скорости, съ какою вода протекаетъ чрезъ щитовое отверстіе *);

3) вода должна вступать на лопатки колеса *безъ удара*, то-есть относительная скорость частицъ воды за мгновеніе до ихъ вступленія на лопатку должна быть равна, и по величинѣ, и по направленію, относительной скорости частицъ воды, находящихся на лопаткѣ;

4) относительная скорость воды на лопаткѣ не должна быть велика, а поверхность лопатки должна быть совершенно ровная и не должна представлять быстраго измѣненія кривизны. Впрочемъ, по причинѣ незначительной длины лопатокъ, затрачиваемая работа на треніе воды о лопатки колеса, никогда не бываетъ значительна даже и при сравнительно большой относительной скорости

и 5) гидравлическія сопротивленія, встрѣчаемыя водою по выходѣ ея изъ колеса, должны быть какъ можно меньше; а для этого нужно, чтобы вода оставляла колесо со скоростью сколь возможно меньшею и чтобы путь, проходимый водою отъ колеса до нижняго резервуара, былъ какъ можно короче, то-есть—чтобы точка схода воды съ колеса лежала какъ можно ближе къ уровню воды нижняго резервуара.

Назовемъ чрезъ ζ_0 высоту теряемую на сопротивленія на пути воды отъ считового отверстія до лопатокъ колеса, чрезъ u скорость, теряемую на ударъ при вступленіи воды въ колесо, чрезъ w скорость, съ какою вода оставляетъ колесо и чрезъ ζ вертикальное разстояніе точки схода воды съ колеса отъ уровня

*) При бо̀льшей скорости непремѣнно будетъ и бо́льшая потеря на треніе.

воды нижняго резервуара, если только эта точка лежитъ выше сказаннаго уровня; тогда $\frac{u^2}{2g}$ представить высоту, теряемую на ударъ при вступленіи воды въ колесо, а $\frac{w^2}{g}+\zeta$ высоту, теряемую на ударъ же при входѣ воды въ нижній резервуаръ, въ которомъ, по нашему предположенію, воду можно разсматривать какъ бы находящуюся въ состояніи покоя. Такимъ образомъ, пренебрегая высотою, теряемою на треніе при движеніи воды по лопаткамъ колеса, можно будетъ работу t представить въ видѣ

$$t=\Delta Q\left(\zeta_0+\frac{u^2}{2g}+\frac{w^2}{2g}+\zeta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

причемъ для коэффиціента η получимъ

$$\eta=1-\frac{2g(\zeta_0+\zeta)+u^2+w^2}{2gH} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Въ дѣйствительности, обыкновенно, встрѣчается еще одно обстоятельство, уменьшающее коэффиціентъ дѣйствія колеса,— это безполезныя потери воды, напримѣръ чрезъ *зазоры*, существующіе между дномъ и стѣнками русла и колесомъ. Если положимъ, что изъ полнаго расхода Q воды, доставляемой щитовымъ отверстіемъ, переходитъ въ нижній резервуаръ нѣкоторый объемъ q, не обнаруживая на пути своемъ никакого дѣйствія на лопатки колеса, то уравненіе

$$T+t=\Delta QH$$

должно замѣнить слѣдующимъ

$$T+t=\Delta(Q-q)H,$$

гдѣ t, вмѣсто уравненія (4), будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$t=\Delta(Q-q)\left(\zeta_0+\zeta+\frac{u^2+w^2}{2g}\right);$$

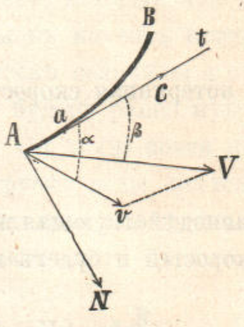
слѣдовательно,

$$\eta=\frac{T}{\Delta QH}=\left(1-\frac{q}{Q}\right)\left(1-\frac{2g(\zeta_0+\zeta)+u^2+w^2}{2gH}\right) \quad . \quad . \quad (6)$$

Изъ этой послѣдней формулы видно, что къ числу выше указанныхъ условій возможно болѣе выгоднаго дѣйствія воды на колесо должно еще присоединить условіе, чтобы количество воды, протекающей изъ верхняго резервуара въ нижній, безъ дѣйствія на лопатки колеса, было сколь возможно меньше.

107. *Общее выраженіе для скоростей u и w.* Выше выведенное выраженіе для коэффиціента η заключаетъ скорости u и w, отъ значенія которыхъ, какъ оказывается, зависитъ значеніе этого коэффиціента самымъ существеннымъ образомъ; поэтому необходимо умѣть опредѣлять эти скорости. Начнемъ съ опредѣленія скорости u, теряющейся на ударъ при вступленіи воды на лопатку.

Пусть AB (фиг. 2) представляетъ лопатку колеса, которую, для общности, мы разсматриваемъ какъ кривую поверхность, а Aa — тотъ ея элементъ, на который вступаетъ вода. At и AN представляютъ послѣдовательно касательную и нормаль къ элементу Aa. Сверхъ того, пусть V будетъ скорость, съ какою движется частица воды въ моментъ вступленія на лопатку, v — скорость движенія элемента Aa лопатки, а α и β углы, образуемые скоростями v и V съ касательною At. Сейчасъ послѣ вступленія на лопатку, частица воды будетъ обладать двумя скоростями: одною *относительною скоростью* c по направленію касательной At и другою v, общею съ элементомъ Aa; слѣдовательно, *абсолютная скорость* воды, сейчасъ по вступленіи на элементъ, будетъ равнодѣйствующая изъ скоростей c и v. Если эта равнодѣйствующая по величинѣ и направленію не будетъ отличаться отъ абсолютной скорости V, какую имѣла частица воды за мгновеніе до вступленія на лопатку, то значитъ частица воды вступила на лопатку безъ удара, въ противномъ же случаѣ будетъ существовать ударъ. Замѣтимъ, что вмѣсто абсолютныхъ скоростей до и послѣ вступленія воды на лопатку, можно разсматривать относительныя скорости. Такъ напримѣръ,



Фиг. 2.

относительная скорость по вступленіи на лопатку воды есть c, а до вступленія относительная же скорость есть равнодѣйствующая изъ скорости V и скорости v, взятой въ противуположномъ направленіи. Чтобы не было удара, нужно, чтобы эта послѣдняя равнодѣйствующая вполнѣ совмѣщалась съ c.

Разложимъ каждую изъ скоростей V и v на двѣ: на одну, направленную по касательной At и другую, направленную по нормали AN къ элементу; тогда можно будетъ составить слѣдующую таблицу для абсолютныхъ скоростей воды до и послѣ вступленія ея на лопатку:

по касательной At:		*по нормали AN:*	
до вступленія	$V\cos\beta$	до вступленія	$V\sin\beta$
послѣ вступленія	$c+v\cos\alpha$	послѣ вступленія	$v\sin\alpha$.

Слѣдовательно, потерянная скорость по направленію касательной будетъ

$$V\cos\beta-(c+v\cos\alpha),$$

а потерянная скорость по направленію нормали будетъ

$$V\sin\beta-v\sin\alpha;$$

равнодѣйствующая же этихъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ скоростей и будетъ искомая потерянная скорось u, поэтому

$$u^2=[V\cos\beta-(c+v\cos)]^2+(V\sin\beta-v\sin\alpha)^2 \quad . \quad . \quad (7)$$

Такъ какъ для полученія возможно лучшаго дѣйствія колеса вода должна вступать на его лопатки безъ удара, то-есть скорость u должна равняться нулю, то условіе это будетъ удовлетворено тогда только, когда величина и направленіе скоростей V, v и c будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$V\cos\beta-(c+v\cos\alpha)=0$$

$$V\sin\beta-v\sin\alpha=0,$$

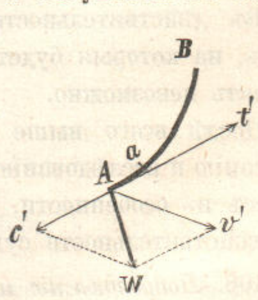
изъ которыхъ получаемъ

$$V\sin\beta = v\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$c = V\cos\beta - v\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Эти послѣднія условныя уравненія показываютъ, что въ случаѣ, *когда вода вступаетъ на лопатки безъ удара, прямая, соединяющая оконечности скоростей V воды и v колеса, по величинѣ и направленію равняется относительной скорости c воды на лопаткѣ*; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, прямая эта (на предъидущей фигурѣ обозначенная пунктиромъ) непремѣнно должна быть параллельна касательной къ тому элементу лопатки, на который вступаетъ вода.

Понятно, что условіямъ (8) и (9) аналитически можно удовлетворить различными способами, но не каждое аналитическое рѣшеніе можетъ быть выполнено въ дѣйствительности; такъ напримѣръ, рѣшеніе $\alpha = \beta$ и $V = v$, удовлетворяющее уравненію (8) и обращающее уравненіе (9) въ $c = 0$, не выполнимо въ дѣйствительности для всѣхъ тѣхъ колесъ, которыя вращаются единственно только отъ давленія воды въ моментъ вступленія ее на лопатку, такъ какъ при равенствѣ величины и направленій скоростей V и v, давленіе это будетъ равно нулю. Вообще должно замѣтить, что условіямъ (8) и (9) почти никогда нельзя удовлетворить для всѣхъ струекъ воды, поэтому на практикѣ стараются имъ удовлетворить только для среднихъ струекъ, которыя въ такомъ случаѣ и вступаютъ въ колесо безъ удара, всѣ же прочія струйки испытываютъ ударъ при вступленіи, но значительно ослабленный. Обратимся теперь къ опредѣленію скорости w, съ которою вода оставляетъ пріемникъ.



Фиг. 3.

Пусть, какъ и прежде, AB будетъ криволинейная лопатка колеса (фиг. 3), Aa — послѣдній элементъ ее, съ котораго вода сходитъ съ колеса, c — относительная скорость частицы воды на этомъ элементѣ и v' — скорость движенія элемента, составляющая съ касательной At'

къ элементу уголъ γ. Понятно, что абсолютная скорость воды въ моментъ схода съ лопатки будетъ равнодѣйствующая изъ скоростей c' и v', то-есть

$$w^2 = c'^2 + v'^2 - 2v'c' \cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Въ колесахъ элементъ Aa, съ котораго вода сходитъ оставляя колесо, есть тотъ же самый элементъ, на который она вступаетъ входя въ колесо, то-есть для колесъ $v' = v$ и $\gamma = \alpha$, а потому

$$w^2 = c'^2 + v^2 - 2vc' \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10 \text{ bis})$$

или, внося вмѣсто $\cos\alpha$ равную ему величину $1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, получимъ

$$w^2 = (c' - v)^2 - 4c'v \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Такъ какъ, для возможно болѣе выгоднаго дѣйствія колеса, скорость w должна равняться нулю, какъ это мы видѣли выше, то условіе это будетъ выполнено тогда только, когда будутъ удовлетворены равенства

$$c' = v \text{ и } \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

или въ болѣе общемъ видѣ

$$c' = v' \text{ и } \gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12 \text{ bis})$$

Въ дѣйствительности однако этимъ условіямъ, по причинамъ, на которыя будетъ указано впослѣдствіи, вполнѣ удовлетворить невозможно.

Послѣ всего выше сказаннаго мы можемъ приступить къ описанію и изслѣдованію дѣйствія каждаго изъ гидравлическихъ колесъ въ особенности, указавъ предварительно еще на виды въ дѣйствительности существующихъ этого рода пріемниковъ.

108. *Подраздѣленіе гидравлическихъ колесъ.* Родъ гидравлическихъ пріемниковъ, называемыхъ колесами, можетъ быть подраздѣленъ на слѣдующія виды:

1) *подливныя колеса*, къ которымъ вода подводится снизу и дѣйствуетъ, какъ обыкновенно говорятъ, своею живою силою,

то-есть только тѣмъ давленіемъ, которое обнаруживаютъ частицы воды на лопатки колеса въ моментъ вступленія первыхъ на послѣднія;

2) *наливныя колеса,* къ которымъ вода подводится сверху и дѣйствуетъ исключительно своимъ вѣсомъ, во все время пока она остается внутри колеса;

3) *боковыя колеса,* занимающія среднее мѣсто между подливными и наливными колесами, по способу дѣйствія воды, и

4) *висячія колеса,* относящіяся къ виду подливныхъ колесъ, но не имѣющія особыхъ приспособленій для подведенія къ нимъ воды.

Каждый изъ указанныхъ видовъ колесъ подраздѣляется еще на классы сообразно или формѣ лопатокъ, или формѣ русла, подводящаго воду, или же наконецъ мѣсту и способу вступленія воды въ колесо; такъ напримѣръ, подливныя колеса бываютъ съ прямыми лопатками и съ кривыми лопатками. Первый классъ колесъ называютъ *пошвенными* или *ударными колесами,* а второй классъ — *колесами Понселе.* Наливныя колеса подраздѣляются на *верхне-наливныя* и *средне-наливныя*, сообразно тому, вступаетъ ли вода въ верхнихъ частяхъ колеса, близъ вертикальнаго, вверхъ идущаго радіуса колеса, или же въ среднихъ частяхъ колеса, ближе къ горизонтальному радіусу. Боковыя колеса отличаются способомъ подведенія къ нимъ воды; такъ въ однихъ колесахъ вода подводится щитовымъ отверстіемъ, а въ другихъ — водосливнымъ отверстіемъ.

А. ПОДЛИВНЫЯ КОЛЕСА.

1) Пошвенное колесо. (Листъ I. Черт. 1, 2 и 3).

109. *Описаніе устройства колеса.* Пошвенное колесо, изъ всѣхъ гидравлическихъ пріемниковъ, имѣетъ наименьшій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія; несмотря однако на это, во многихъ мѣстностяхъ Россіи, колесо это распространено весьма сильно. Обстоятельство это объясняется простотою устройства этого пріемника,

не требующаго искусныхъ рукъ для его построенія и тѣмъ, что колесо это всегда строится изъ дерева, а потому въ мѣстностяхъ, изобилующихъ лѣсомъ, построеніе его, при простотѣ устройства, обходится чрезвычайно дешево.

Когда ширина колеса, по направленію его оси, выходитъ не болѣе одного метра, то пошвенное колесо дѣлаютъ съ однимъ *ободомъ* или *вѣнцомъ*, который въ этомъ случаѣ составляется изъ косяковъ, построенныхъ изъ брусьевъ; при большей же ширинѣ колеса, оно имѣетъ два обода, построенныхъ изъ досокъ. Ободья эти скрѣпляются съ деревяннымъ валомъ, или при помощи ручекъ, пересѣкающихся на крестъ, или же при помощи спицъ, идущихъ по направленію радіусовъ колеса. Лопатки этого колеса строятся изъ досокъ и бываютъ прямыя, идущія по направленію радіусовъ. Когда колесо имѣетъ два обода, то лопатки помѣщаются въ особыхъ пазахъ, вырѣзанныхъ въ этихъ ободьяхъ, причемъ одинъ ободъ стягивается съ другимъ нѣсколькими желѣзными тягами; когда же колесо имѣетъ одинъ брусчатый ободъ, то лопатки привинчиваются къ особымъ клиньямъ, укрѣпленнымъ чеками въ этомъ ободѣ. Листъ I атласа представляетъ пошвенное колесо и различныя его детали, къ подробному описанію которыхъ мы будемъ имѣть случай возвратиться въ свое время, когда будемъ говорить о построеніи колесъ.

Вода къ пошвенному колесу подводится русломъ съ прямоугольнымъ поперечнымъ сѣченіемъ и обыкновенно прямымъ, слабо наклоненнымъ къ горизонту *), дномъ. Это дно и вертикальныя стѣнки русла обнимаютъ колесо такъ, что между имъ и стѣнками, а также и дномъ русла, остаются только незначительной величины зазоры, для возможности свободнаго движенія колеса.

Щитъ строится изъ досокъ на подобіе того, какъ строятся лопатки колеса и ставится въ началѣ русла или вертикально, или же наклонно къ горизонту подъ угломъ отъ 45° до 60°. Для направленія движенія щита во время его подъема и опусканія, имѣются особыя направляющія стойки. Разстояніе щита

---

*) Подъ угломъ до 4°.

отъ нижайшей точки колеса должно быть сколь возможно меньше и не должно превосходить радіуса колеса.

Когда щитъ приподнятъ, то образуется прямоугольной формы отверстіе у самаго дна русла, чрезъ которое вода вступаетъ въ русло и, встрѣчая въ немъ лопатки колеса, производитъ на нихъ давленіе, заставляя такимъ образомъ колесо вращаться.

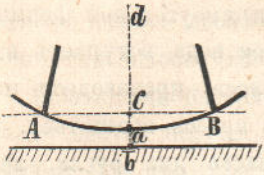
Въ колесахъ, хорошо устроенныхъ, часть дна русла, лежащая подъ вертикальнымъ радіусомъ колеса, окружаетъ колесо концентрически на протяженіи, равномъ пространству, занимаемому тремя или даже четырмя лопатками, послѣ чего дно русла опять представляетъ плоскость, наклоненную къ горизонту подъ угломъ до 4^o, на протяженіи около одного метра; затѣмъ уклонъ дна постепенно увеличивается, пока, наконецъ, дно русла не совпадетъ съ дномъ нижняго резервуара. Разстояніе между боковыми стѣнками этой послѣдней части русла также постепенно увеличивается.

Чтобы составить понятіе о величинѣ работы, передаваемой пошвенному колесу, мы постараемся опредѣлить всѣ величины, входящія въ формулу (6).

Начнемъ съ опредѣленія количества q.

110. *Опредѣленіе потерь объема воды чрезъ зазоры.* Предположимъ сначала, что дно русла подъ колесомъ прямое и горизонтальное, и назовемъ чрезъ V скорость, съ какою движется вода въ части русла между щитомъ и колесомъ, чрезъ δ толщину *сливного* слоя воды въ руслѣ, чрезъ L ширину русла, считаемую параллельно оси колеса, чрезъ z зазоръ у дна русла, т.-е. разстояніе дна отъ наружной окружности колеса (окружности, описываемой дальнѣйшими отъ оси оконечностями лопатокъ), чрезъ z' боковые зазоры, существующіе между колесомъ и боковыми вертикальными стѣнками русла, чрезъ R наружный радіусъ колеса, чрезъ v скорость оконечности лопатокъ и, наконецъ, чрезъ e разстояніе между двумя смежными лопатками, считаемое по наружной окружности.

Зазоръ, существующій близъ дна русла, образуетъ узкую горизонтальную щель, длина которой равна L, а ширина—мѣняется сообразно положенію лопатокъ; такъ, напримѣръ, когда какая-либо лопатка колеса находится въ вертикальномъ положеніи ad (фиг. 4), то ширина щели имѣетъ наименьшее значеніе и въ это время, согласно обозначенію, равняется z; когда же средина между двумя смежными лопатками A и B займетъ нижайшее положеніе, то ширина щели принимаетъ наибольшее значеніе и въ это время равняется $ba + ac$. Принимая дугу Aa, по ея малости, за прямую линію, получимъ для опредѣленія ac выраженіе



Фиг. 60.

$$(\overline{Aa})^2 = \overline{ac} \times 2R \quad \text{гдѣ} \quad \overline{Aa} = \tfrac{1}{2}e,$$

слѣдовательно
$$\overline{ac} = \frac{e^2}{8R}$$

а потому наибольшее значеніе ширины щели будетъ равно

$$z + \frac{e^2}{8R},$$

а средняя ариѳметическая изъ наибольшаго и наименьшаго значеній будетъ

$$z + \frac{e^2}{16R}.$$

Можно, слѣдовательно, принять, что площадь щели, образуемой зазоромъ у дна русла, постоянно остается равною

$$L\left(z + \frac{e^2}{16R}\right)$$

а такъ какъ вода чрезъ эту щель протекаетъ со скоростью v, то теряющійся объемъ въ каждую секунду будетъ равенъ

$$Lv\left(z + \frac{e^2}{16R}\right) = \frac{Q}{\delta}\left(z + \frac{e^2}{16R}\right)\frac{v}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

гдѣ
$$Q = L\delta V.$$

Боковые зазоры образуютъ двѣ узкихъ вертикальныхъ щели съ постоянною шириною z' и постоянною же длиною δ; слѣдовательно, объемъ воды, теряющійся чрезъ эти щели въ каждую секунду, будетъ

$$2z'\delta v \quad \text{или} \quad \frac{Q}{L} 2z' \frac{v}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Полная же потеря объема воды въ секунду чрезъ зазоры у дна и стѣнокъ русла будетъ

$$Q\left(\frac{z}{\delta} + \frac{2z'}{L} + \frac{e^2}{16R\delta}\right)\frac{v}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Въ случаѣ, когда часть русла окружаетъ нижайшую часть колеса концентрически, на протяженіи, не меньшемъ разстоянію двухъ смежныхъ лопатокъ, ширина нижняго зазора сохраняетъ постоянную величину z, а потому, въ такомъ случаѣ, въ выраженіи (c) послѣдній членъ должно отбросить.

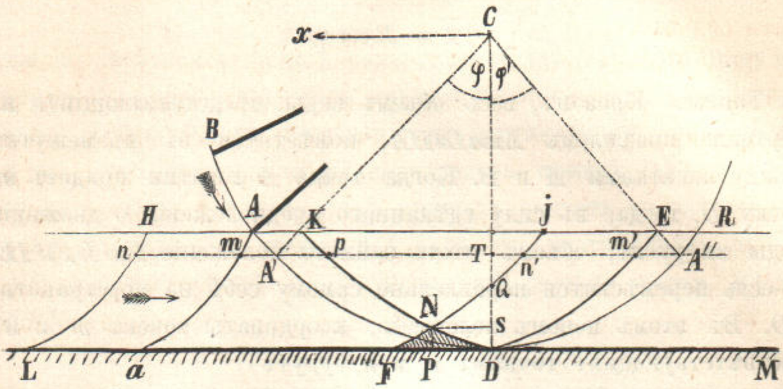
Изъ выраженія (c) видимъ, что выгодно уменьшать z, z' и e и увеличивать R, L и δ. Въ дѣйствительности z бываетъ равно отъ 2 до 5 сантиметровъ, а z' отъ 1 до 2,5. Такіе значительные зазоры допускаются потому, что при нетщательномъ построеніи колеса и фундамента подъ подшипники вала, должно ожидать довольно чувствительныхъ измѣненій формы колеса и положенія его оси, измѣненій, которыя при малыхъ значеніяхъ зазоровъ могли бы повлечь порчу лопатокъ или порчу русла, еслибы лопатки начали задѣвать за дно или стѣнки сего послѣдняго.

Понятно, что вслѣдствіе сравнительно большихъ значеній, допускаемыхъ для зазоровъ z и z', нужно, во избѣжаніе значительныхъ потерь воды, допускать и большія значенія для δ и L. Но увеличеніе толщины сливного слоя влечетъ за собою увеличеніе высоты лопатокъ, что дѣлаетъ колесо болѣе грузнымъ и затрудняетъ выходъ лопатокъ изъ воды; поэтому увеличиваніе δ возможно только до нѣкотораго предѣла. Обыковенно δ бываетъ равно отъ 12 до 20 сантиметровъ, такъ что отношеніе $\frac{z}{\delta}$ въ практикѣ мѣняется въ предѣлахъ отъ 0,1 даже до 0,2. Что же касается отношенія $\frac{2z'}{L}$, то при *сильныхъ* колесахъ, которыя обыкновенно бываютъ широки, отношеніе это выходитъ весьма мало; но при колесахъ *слабыхъ*, а слѣдовательно и узкихъ, значеніе этого отношенія бываетъ довольно чувствительно. Изъ этого послѣдняго обстоятельства не трудно вывести заключеніе, оправдывающееся на опытѣ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія слабыхъ колесъ меньше коэффиціента колесъ сильныхъ.

111. *Потеря объема отъ безполезнаго протеканія воды между лопатками.* Кромѣ потерь воды чрезъ зазоры, существуетъ еще въ подливныхъ колесахъ съ прямымъ русломъ потеря, происходящая отъ того, что частицы воды движутся по прямымъ линіямъ, между тѣмъ какъ точки лопатокъ описываютъ окружности. Вслѣдстіе такой разницы въ формѣ траэкторій точекъ лопатокъ и частицъ воды, нѣкоторыя изъ сихъ послѣднихъ проходятъ между лопатками, не успѣвая произвести на нихъ давленія.

Точное опредѣленіе этой потери невозможно, такъ какъ истинное движеніе частицъ воды подъ колесомъ намъ совершенно неизвѣстно. Приходится, слѣдовательно, довольствоваться рѣшеніемъ, вытекающимъ изъ предположеній, болѣе или менѣе значительно уклоняющихся отъ истины. Герстнеръ, первый обратившій вниманіе на эту потерю, опредѣлилъ ее въ предположеніи, что каждый мысленно выдѣленный объемъ воды въ руслѣ движется въ немъ, несмотря на существованіе лопатокъ, не измѣняя своей формы, такъ какъ будто бы онъ принадлежалъ твердому тѣлу.

Вотъ какимъ образомъ можно опредѣлить эту потерю: пусть LM (фиг. 5) представляетъ дно русла и HR — уровень воды въ немъ, который на всемъ протяженіи русла разсматривается какъ одна горизонтальная плоскость. Положимъ, что нѣкоторая лопатка колеса, въ данное мгновеніе, касается уровня воды въ точкѣ A. Понятно, что въ это же мгновеніе тѣ частицы воды, которыя будутъ касаться нижняго ребра лопатки, во время ея нисходящаго движенія отъ A до D, располагаются на нѣкоторой кривой поверхности, пересѣкающейся съ плоскостью чертежа, по кривой Ama. Постараемся опредѣлить положеніе какой-либо точки m этой кривой, относя ее къ горизонтальному радіусу Cx, принимаемому за ось абсциссъ, и къ вертикальному радіусу CD, принимаемому за ось ординатъ. Предполагая, что всѣ частицы воды движутся по прямымъ горизонтальнымъ линіямъ со скоростью V, а оконечность A лопатки — по дугѣ AD со скоростью v, должно предположить, что точка m коснется



Фиг. 5.

оконечности лопатки тогда, когда сія послѣдняя придетъ въ точку A', то-есть что частица m проходитъ путь mA' въ тотъ же промежутокъ времени, въ который точка A проходитъ дугу AA'; слѣдовательно,

$$\overline{mA'} = \breve{AA'} \times \frac{V}{v}, \quad \overline{aD} = \breve{AD} \times \frac{V}{v}$$

и координаты точки m будутъ:

$$\overline{Tm} = \breve{AA'} \times \frac{V}{v} + R \cdot \sin\varphi = (\breve{AD} - R \cdot \varphi)\frac{V}{v} + R \cdot \sin\varphi$$

$$\overline{CT} = R \cdot \cos\varphi,$$

гдѣ φ есть дуга, измѣряющая уголъ $A'CD$.

Подобнымъ образомъ, какъ была опредѣлена кривая Ama, найдется и кривая HnL, указывающая на расположеніе, въ данное же мгновеніе, тѣхъ частицъ воды, которыя будутъ касаться оконечности B лопатки, слѣдующей непосредственно за лопаткою A. Называя, какъ и прежде, дугу AB чрезъ e, получимъ

$$\overline{AH} = \overline{mn} = \overline{aL} = e\frac{V}{v},$$

слѣдовательно, координаты точки n будутъ

$$\overline{Tn} = (\breve{AD} - R\,.\,\varphi)\frac{V}{v} + R\sin\varphi + e\frac{V}{v}$$

$$\overline{CT} = R\cos\varphi.$$

Такимъ образомъ, весь объемъ воды, представляющійся на чертежѣ профилемъ $AmaLnHA$, помѣстится въ промежуткѣ между лопатками A и B. Когда точка A лопатки придетъ въ точку D, тогда, въ силу сдѣланнаго предположенія о движеніи воды въ руслѣ, объемъ этотъ займетъ положеніе $Em'DFn'IE$, то-есть перемѣстится параллельно самому себѣ на пространство aD. Въ этомъ новомъ положеніи, координаты точекъ m' и n', соотвѣтствующихъ точкамъ m и n, будутъ

$$\left.\begin{aligned}
\overline{Tm'} &= \overline{Tm} - \overline{aD} = -R\,.\,\varphi\frac{V}{v} + R\sin\varphi \\
\overline{Tn'} &= \overline{Tn} - \overline{aD} = -R\,.\,\varphi\frac{V}{v} + R\sin\varphi + e\frac{V}{v} \\
\overline{CT} &= R\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

Теперь, когда оконечность A лопатки находится въ точкѣ D, можно вычертить кривую DpK, указывающую на положеніе частицъ воды, которыя будутъ касаться оконечности этой же лопатки во время ея восходящаго движенія по дугѣ DA''. Какая-либо точка p этой кривой опредѣлится условіемъ

$$\overline{pA''} = \breve{DA''} \times \frac{V}{v}.$$

Понятно, что ни одна изъ частицъ воды объема $DFIE$, лежащая на-лѣво отъ кривой DpK, не можетъ дѣйствовать на лопатку A, слѣдовательно объемъ, соотвѣтствующій профилю DFN, и будетъ тотъ, который, помѣстившись въ промежуткѣ между двумя смежными лопатками A и B, проходитъ между ними, не успѣвая произвести на нихъ давленія. Вопросъ, слѣдовательно, сводится на опредѣленіе площади профиля DFN. Для этого замѣтимъ предварительно, что кривая DpK расположена симметрично съ кривою $Dm'E$ относительно вертикальнаго радіуса CD. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\overline{Tp} = \overline{pA''} - \overline{TA''} = \overset{\smile}{DA''}\frac{V}{v} - R\sin\varphi = R\ .\ \varphi\frac{V}{v} - R\sin\varphi,$$

что по числовой величинѣ равно количеству $\overline{Tm'}$, а по знаку ему прямо противоположно. Изъ симметрическаго расположенія кривыхъ DE и DK въ отношеніи къ вертикальному радіусу CD и изъ того, что кривая FI параллельна кривой DF, если разстоянія между точками этихъ кривыхъ считать по горизонтальному направленію, прямо слѣдуетъ, что вертикальная прямая NP разбиваетъ профиль DFN на двѣ равныя части DPN и FPN.

Пусть x и y будутъ координаты нѣкоторой точки p кривой DpK; тогда для опредѣленія уравненія этой кривой нужно только исключить φ изъ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$x = R\ .\ \varphi\frac{V}{v} - R\sin\varphi \quad \text{и} \quad y = R\cos\varphi.$$

Такъ какъ уравненіе кривой DK намъ нужно только для опредѣленія положенія точки N, которая, при правильномъ устройствѣ колеса, всегда лежитъ въ нижней части кривой близъ точки D, то значеніе угла φ, соотвѣтствующее этой точкѣ, будетъ не велико; поэтому, принявъ

$$\sin\varphi = \varphi \quad \text{и} \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

можно будетъ послѣднія выраженія для x и y представить въ видѣ

$$x = R\ .\ \varphi\frac{V - v}{v} \quad \text{и} \quad y = R - \frac{R}{2}\varphi^2;$$

откуда для уравненія кривой найдемъ

$$R - y = \frac{v^2}{2R(V - v)^2}x^2. \quad .\ .\ .\ .\ .\ (e)$$

Слѣдовательно, кривая DK есть парабола, имѣющая вершину въ точкѣ D.

Такъ какъ абсцисса NS точки N равна $\frac{1}{2}e\frac{V}{v}$ (т.-е. $\frac{1}{2}FD$), то внося это значеніе вмѣсто x въ уравненіе (e), получимъ

$$\overline{NP}=\frac{v^2}{2R(V-v)^2}\times\frac{1}{4}e^2\frac{V^2}{v^2}=\frac{e^2V^2}{8R(V-v)^2}\quad\ldots\quad\text{(f)}$$

Для площади прямоугольника $PNSD$ найдемъ

$$\frac{e^2V^2}{8R(V-v)^2}\times\frac{1}{2}e\frac{V}{v}=\frac{e^3V^3}{16Rv(V-v)^2}.$$

Двѣ трети этой площади, по свойству параболы, представятъ площадь профиля DNS, а остальная треть — площадь DPN; слѣдовательно, площадь профиля DNF будетъ равна $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника $PNSD$. И такъ площадь

$$(DNF)=\frac{e^3V^3}{24Rv(V-v)^2}\quad\ldots\ldots\quad\text{(g)}$$

Умножая эту послѣднюю площадь на $L-2'z$, т.-е. на ширину русла, уменьшенную боковыми зазорами (такъ какъ потеря чрезъ эти зазоры была уже нами принята во вниманіе), получимъ объемъ, теряющійся въ промежуткѣ между двумя смежными лопатками, а умножая этотъ послѣдній объемъ на число промежутковъ, проходящихъ въ секунду по руслу, т.-е. на $\frac{v}{e}$, получимъ потерю объема въ секунду. Слѣдовательно, потеря воды въ секунду отъ безполезнаго протеканія между лопатками равняется:

$$\frac{e^3V^3}{24Rv(V-v)^2}(L-2z')\frac{v}{e}=\frac{e^2V^3L}{24R(V-v)^2}\left(1-\frac{2z'}{L}\right)$$

или, такъ какъ $\delta LV=Q$,

$$\frac{e^2V^2}{24R\delta(V-v)^2}\left(1-\frac{2z'}{L}\right)Q\quad\ldots\ldots\quad\text{(h)}$$

Изъ этого выраженія видимъ, что для уменьшенія этой потери, подобно тому, какъ и для уменьшенія потери чрезъ зазоры, нужно уменьшать e и увеличивать R и δ; сверхъ того, полезно замѣтить, что *потеря эта возрастаетъ съ возрастаніемъ скорости колеса v.*

Необходимо имѣть въ виду, что при выводѣ выраженія (h) предполагалось, что точка N профиля DNF лежитъ ниже уровня HR воды, т.-е. что $NP < \delta$; поэтому въ случаѣ, еслибы NP было болѣе δ, выраженіе это не представило бы искомой потери. Дѣйствительно, въ этомъ послѣднемъ случаѣ, потеря соотвѣтствовала бы только части этого профиля, имѣющей форму, сходную съ формою трапеціи. Мы не будемъ однако разсматривать случая, когда $NP > \delta$, такъ какъ при устройствѣ колеса всегда заботятся о томъ, чтобы потери воды были вообще сколь возможно меньше, а потому въ дѣйствительности, въ хорошо устроенныхъ колесахъ, всегда соблюдается условіе $PN < \delta$.

Такъ напримѣръ, при построеніи колеса часто пользуются условіемъ

$$\overline{PN} = \frac{e^2 V^2}{8R(V-v)^2} = 0{,}30\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

которое, по внесеніи въ него вмѣсто e количества $\frac{2\pi R}{i}$, гдѣ i есть число лопатокъ, доставитъ уравненіе

$$i = \pi \frac{V}{V-v} \sqrt{\frac{R}{0{,}6\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(k)}$$

Мы увидимъ, что скорость v въ пошвенныхъ колесахъ всегда бываетъ близка къ 0,5 V; поэтому, принявъ это значеніе для скорости v, получимъ

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{R}{0{,}6\,\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(l)}$$

Напримѣръ, при $R = 2$ метр. и $\delta = 0{,}15$ метра получимъ для числа лопатокъ

$$6{,}28 \sqrt{\frac{2}{0{,}09}}$$

т.-е. 30. Если условіе (i) введемъ въ выраженіе (h), то найдемъ для него

$$0{,}10 \left(1 - \frac{2z'}{L}\right) Q,$$

т.-е., при соблюденіи условія (i), потеря воды отъ безполезнаго ея протеканія между лопатками составляетъ нѣсколько меньше 10% полнаго расхода Q.

Если вслѣдствіе мѣстныхъ обстоятельствъ уровень воды въ нижнемъ резервуарѣ способенъ сильно мѣняться, то во время *высокой воды* нижняя часть колеса затопляется и въ этомъ случаѣ колесо дѣйствуетъ худо, а иногда и совершенно останавливается; поэтому, въ такихъ мѣстностяхъ, во избѣжаніе остановокъ въ дѣйствіи колеса, дно передней части русла (части LD на фиг. 5) приподнимаютъ вмѣстѣ съ колесомъ на высоту, равную почти δ, вслѣдствіе чего русло образуетъ *порогъ* подъ колесомъ. Въ такомъ случаѣ, при нормальномъ уровнѣ, горизонтъ воды въ нижнемъ резервуарѣ, т.-е. въ части русла за колесомъ, находится почти на уровнѣ дна передней части русла, а въ случаѣ высокой воды горизонтъ этотъ хотя и поднимается, но не затопляетъ колеса. Понятно, что въ случаѣ русла съ порогомъ, лопатка во все время восходящаго движенія движется въ воздухѣ; поэтому въ этомъ случаѣ, вмѣсто профиля DFN, нужно взять профиль DFQ, т.-е. вмѣсто кривой DK взять прямую DQ.

Для опредѣленія положенія точки Q нужно только въ выраженіи (d) принять $Tn' = 0$ и тогда для опредѣленія угла φ, соотвѣтствующаго точкѣ Q, получимъ уравненіе

$$-R\varphi\frac{V}{v}+\sin\varphi+e\frac{V}{v}=0,$$

изъ котораго, принимая $\sin\varphi=\varphi$, найдемъ

$$\varphi=\frac{e}{R}\cdot\frac{V}{V-v}$$

слѣдовательно,

$$\overline{CQ}=R\cos\varphi=R\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)=R-\frac{e^2V^2}{2R(V-v)^2}$$

и наконецъ $$\overline{DQ}=\frac{e^2V^2}{2R(V-v)^2}.$$

Но кривая FI есть парабола, поэтому площадь профиля FDQ будетъ равна $\frac{1}{3}$ площади прямоугольника, построеннаго на $\overline{FD}$ и $\overline{DQ}$, т.-е. площадь эта будетъ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2V^2}{2R(V-v)^2}\times e\frac{V}{v}=\frac{e^3V^3}{6Rv(V-v)^2}.$$

Сравнивая это послѣднее выраженіе съ выраженіемъ (g), видимъ, что при существованіи порога потеря воды отъ безполезнаго протеканія между лопатками *въ четыре раза болѣе*, нежели въ случаѣ русла безъ порога.

Чтобы это послѣднее заключеніе было справедливо, нужно, чтобы $\overline{DQ}$ было не болѣе δ; т.-е. должно существовать условіе,

$$\frac{e^2 V^2}{2R(V-v)^2} \leqslant \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(m)}$$

иначе потеря будетъ еще значительнѣе. Принявъ

$$\frac{e^2 V^2}{2R(V-v)^2} = \delta$$

и замѣнивъ e на $\frac{2\pi R}{i}$, найдемъ

$$i = 2\pi \frac{V}{V-v} \cdot \sqrt{\frac{R}{2\delta}}$$

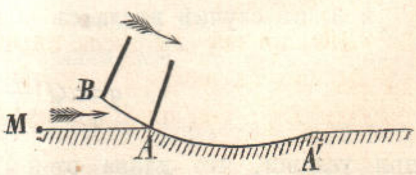
или, такъ какъ $v = 0{,}5\ V$,

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Это послѣднее уравненіе будетъ доставлять для числа лопатокъ значеніе, нѣсколько большее, нежели формула (l).

Потеря воды, которую мы теперь разсматриваемъ, можетъ быть однако устранена совершенно. Для этого нужно только нижнюю часть колеса, на достаточномъ протяженіи, окружить концентрическимъ съ колесомъ русломъ, то-есть заставить частицы воды подъ колесомъ двигаться по дугамъ, подобно тому, какъ движутся точки лопатокъ.

Положимъ, что AA' (фиг. 6) представляетъ концентрическую съ колесомъ часть русла и что одна изъ лопатокъ находится въ точкѣ A. Въ это время частица M воды, находящаяся на разстояніи MA, равномъ $e\frac{V}{v}$, отъ точки A, будетъ послѣднею частицею, помѣщающеюся въ промежуткѣ



Фиг. 6

между двумя лопатками A и B; поэтому, если желаемъ, чтобы ни одна изъ частицъ воды не проскользнула между лопатками безъ дѣйствія, нужно распорядиться длиною дуги AA' такъ, чтобы частица M успѣла догнать лопатку A раньше, нежели сія послѣдняя придетъ въ точку A', т.-е. нужно, чтобы было соблюдено условіе

$$\overline{MA} + \breve{AA'} < \breve{AA'}\frac{V}{v}$$

или

$$e\frac{V}{v} + \breve{AA'} < \breve{AA'}\frac{V}{v}$$

откуда

$$\breve{AA'} > e\frac{V}{V-v}$$

или, такъ какъ v весьма близко къ 0,5 V, $\breve{AA'} > 2e$.

Слѣдовательно, *концентрическая съ колесомъ часть русла должна обхватывать не менѣе какъ три лопатки колеса.*

Соединяя всѣ найденныя выше потери объема, получимъ для полной потери q слѣдующія выраженія:

1) Въ случаѣ русла съ прямымъ дномъ

$$q = Q\left[\left(\frac{z}{\delta} + \frac{2z'}{L} + \frac{e^2}{16R\delta}\right)\frac{v}{V} + \frac{e^2V^2}{24R\delta(V-v)}\left(1-\frac{2z'}{L}\right)\right] \quad . \quad (14)$$

причемъ $\dfrac{e^2V^2}{8R(V-v)^2} < \delta.$

2) Въ случаѣ прямого русла съ порогомъ

$$q = Q\left[\left(\frac{z}{\delta} + \frac{2z'}{L} + \frac{e^2}{16R\delta}\right)\frac{v}{V} + \frac{e^2V^2}{6R\delta(V-v)^2}\left(1-\frac{2z'}{L}\right)\right] \quad . \quad (15)$$

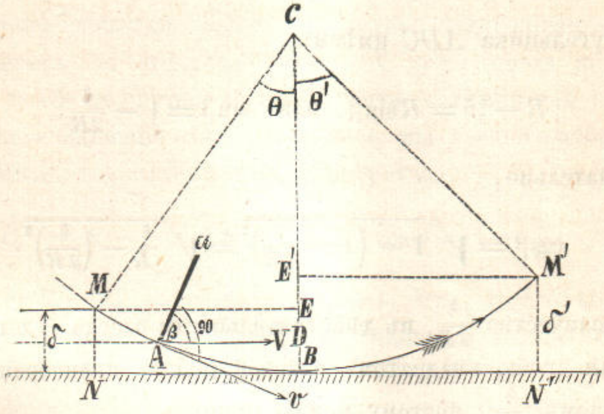
при условіи, что $\dfrac{e^2V^2}{2R(V-v)^2} \gtreqless \delta.$

и 3) въ случаѣ русла съ концентрическою колесу частью

$$q = Q\left(\frac{z}{\delta} + \frac{2z'}{L}\right)\frac{v}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

при условіи, что длина этой дугообразной части русла не менѣе $2e$.

112. *Опредѣленіе скорости, теряющейся на ударъ при вступленіи воды въ колесо.* Точное опредѣленіе скорости, теряющейся на ударъ, при вступленіи воды въ колесо, представляетъ не меньшія затрудненія какъ и опредѣленіе потери воды отъ безполезнаго протеканія ея между лопатками. Изъ полнаго объема воды, помѣщающагося въ промежуткѣ между двумя смежными лопатками, только весьма немногія частицы встрѣчаютъ оконечность одной изъ нихъ и то при началѣ погруженія ея въ воду, всѣ же остальныя частицы встрѣчаютъ не лопатку, но воду, предварительно вошедшую и задержанную въ своемъ движеніи лопаткою, такъ что ударъ происходитъ не о сію послѣднюю, но о воду, находящуюся въ колесѣ, обстоятельства движенія которой намъ почти совершенно неизвѣстны. Сверхъ



Фиг. 7.

того, понятно, что различныя частицы воды, вступая въ колесо при различныхъ обстоятельствахъ, будутъ испытывать и различный ударъ; слѣдовательно, нужно искать среднее значеніе скорости, потерянной на этотъ ударъ. Мы будемъ предполагать, что среднее значеніе скорости, теряющейся на ударъ, есть та скорость, которая теряется при вступленіи въ колесо *среднихъ струекъ*, то-есть струекъ, образующихся изъ частицъ, движущихся на глубинѣ равной $\frac{1}{2}\delta$.

Примѣняя къ такой средней струйкѣ формулу (7) № 107, имѣя притомъ въ виду, что разсматриваемое нами пошвенное колесо имѣетъ плоскія лопатки, направленныя по радіусамъ, нужно будетъ, согласно чертежу (фиг. 7), принять въ указанной формулѣ $\alpha = 90°$ и разсматривать v какъ скорость, съ которою движутся точки наружной окружности колеса, вслѣдствіе его вращенія.

Слѣдовательно, для опредѣленія средней скорости u, теряющейся на ударъ, при вступленіи воды въ колесо, можно принять уравненіе

$$u^2 = (V\cos\beta - c)^2 + (V\sin\beta - v)^2 = V^2 + v^2 - 2Vv\sin\beta - \\ - c(2V\cos\beta - c)$$

гдѣ c есть относительная скорость воды на лопаткѣ,

$$\angle\beta = \angle aAV = 90° - \angle ABC \quad \text{и} \quad \overline{DB} = \tfrac{1}{2}\delta.$$

Изъ треугольника ADC имѣемъ

$$R - \tfrac{1}{2}\delta = R\sin\beta \quad \text{или} \quad \sin\beta = 1 - \frac{\delta}{2R},$$

а слѣдовательно,

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta}{2R}\right)^2} = \sqrt{\frac{\delta}{R} - \left(\frac{\delta}{2R}\right)^2}.$$

Но количество $\frac{\delta}{2R}$, въ дѣйствительности всегда будетъ незначительная дробь, квадратомъ которой можно пренебречь предъ количествомъ $\frac{\delta}{R}$; поэтому можно принять

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{\delta}{R}},$$

а слѣдовательно,

$$u^2 = (V - v)^2 + Vv\frac{\delta}{R} - c\left(2V\sqrt{\frac{\delta}{R}} - c\right).$$

Остается только опредѣлить и внести въ послѣднее уравненіе относительную скорость c воды на лопаткѣ. Еслибы частицы воды могли двигаться вдоль по лопаткѣ совершенно свободно, не соударяясь съ частицами, ранѣе вошедшими въ промежутокъ между лопатками, то относительная ихъ скорость послѣ вступленія была бы равна $V\cos\beta$, т.-е. равнялась бы